

博士論文

無限次元システム理論に基づくむだ時間系の  
安定解析と制御系設計に関する研究

平成29年3月

増井 詠一郎

岡山大学大学院  
自然科学研究科

## 要旨

物質の搬送や情報の伝搬などに伴う信号の時間遅れをもつシステムはむだ時間系と呼ばれ、工学、物理学、化学、経済学などの様々な分野においてよくみられる。近年、研究が盛んなネットワーク制御システムもその一例であり、これらむだ時間を含む系に対する研究の重要性は高いといえる。むだ時間系のダイナミクスは過去の履歴にも依存することから、状態空間表現を考えた場合、状態が無限次元となり、その解析・設計は数学的に容易ではない。このため、従来研究は幅広いアプローチが混在しており、理論的に包括的な理解が得られているとはいいがたい面もある。そこで本研究では、無限次元システム理論に基づくことで、より数学的に厳密なむだ時間系の安定解析・制御系設計を検討することを目的とする。

本研究の1つめのトピックとしては、遅れ型むだ時間系の安定解析について考える。システムの安定性は解の挙動によって決定される。有限次元線形時不変系の場合、解は行列指数関数によって特徴づけられるため、システム行列の固有値の存在領域によって安定性を判別できる。一方で、遅れ型むだ時間系の解は強連続半群で表現され、その安定性は無限小生成作用素のスペクトル分布により決定される。スペクトルは作用素を有限次元近似することで計算できるが、微分方程式の数値解法に基づく近似手法では、作用素を形式的なものとして扱うため、近似の妥当性を作用素自体の性質から直接的に議論することができない。他方、モノドロミ作用素によるシステム表現では、その作用素が陽に与えられるため、作用素の数学的な性質に基づいてその行列近似手続きの妥当性を厳密に議論することができる。低次の多項式関数を用いた近似では、次数の増加にともなって計算効率が単調によくなるという従来結果が示されているが、効率の改善には限界があると考えるのが妥当である。したがって、一般次数の多項式近似を導入し、その結果を一様に議論することがここでの主たる目的である。具体的には、多項式の次数によらずその近似が数学的に妥当であることを示した上で、高次近似による計算効率の改善効果とその限界を探る。

第2のトピックとして入力むだ時間系に対する制御系設計、とくに状態予測制御を取り上げる。この制御法は、状態の予測値を用いて、仮想的な遅れのない状態フィードバックを可能にする。従来研究においては、システム行列と同じ数の極を任意に配置することができ、その他は自動的に消去される、と述べられているが、離散時間系の場合、閉ループ系は指定極以外のむだ時間要素に対応する原点極も有することが示されることから、この観察は必ずしも正確ではない。連続時間系の場合、指定極以外は複素平面の左無限遠に分布すると考えられるが、これまでの研究ではこの点は必ずしも明らかに示されていない。ここでの目的は、1つ

めの課題と同様に、作用素を用いたシステム表現に基づいて、状態予測制御系の数理的性質を明らかにすることである。また、数値計算によりスペクトル分布の検証をおこなう。

3 番目のトピックは状態予測制御の拡張に関するものである。ここでは、作用素表現は陽に用いないものの、研究の動機は第 2 部のスペクトルの分布に関連している。離散時間系に対しては、通常自動的に配置される原点極を、任意の地点に配置する拡張手法が提案されている。原点極はデッドビート制御のような強いフィードバックに対応することから、この再配置によって、ロバスト性を含む性能の向上が期待できる。ここでは、この方法の連続時間系への拡張、すなわち複素平面の左無限遠にある極の一部を有限領域に配置する制御則の導出をおこない、この追加の自由度による、ロバスト性の改善効果について、数値例を通じて考察する。

本論文の構成は以下のとおりである。まず第 1 章で、むだ時間系の基本性質と解析・設計に関する従来研究をまとめ、その後本論文の目的を述べる。以降の章で必要となる数学的準備を第 2 章でおこなう。第 3 章では、高次ホールド近似を用いたモノドロミ作用素のスペクトル計算法を提案する。高次近似を用いるためにはモノドロミ作用素が十分滑らかな空間上で定義される必要があるため、その場合の作用素の性質を明らかにし、近似手続きの数学的妥当性を証明する。その後、数値例によってその計算効率の改善効果とその限界について検証する。第 4 章では、状態予測制御系の抽象的な微分方程式表現を導出し、そのスペクトル分布について考察する。そして、強連続半群表現に関するスペクトル計算法を適用し、先の解析結果の妥当性を示す。また、離散時間系に対する結果に基づき、連続時間系の状態予測制御の拡張法を第 5 章で提案する。提案法によって付加された自由度によって、通常の状態予測制御系よりもロバスト性を改善できることを数値例により示す。最後に、第 6 章で本論文をまとめ、今後の課題を述べる。

# 目次

第 1 章	はじめに	– 3 –
1.1	むだ時間系の基礎事項	– 3 –
1.1.1	分類	– 3 –
1.1.2	表現方法	– 5 –
1.2	安定解析	– 6 –
1.3	制御系設計	– 9 –
1.4	研究目的・本論文の構成	– 12 –
第 2 章	数学的準備	– 14 –
2.1	ノルム空間に関する定義と性質	– 14 –
2.2	作用素に関する定義と性質 [44]	– 16 –
2.3	スペクトルに関する定義と性質	– 18 –
2.4	作用素を用いたシステム表現	– 19 –
2.4.1	サンプル値制御系	– 19 –
2.4.2	遅れ型むだ時間系 [7]	– 21 –
第 3 章	モノドロミ作用素表現を用いた遅れ型むだ時間系の安定解析	– 24 –
3.1	問題設定	– 25 –
3.2	一般化サンプリング/ホールド作用素	– 26 –
3.3	近似手続きの数学的妥当性	– 28 –
3.3.1	モノドロミ作用素のコンパクト性	– 29 –
3.3.2	摂動の収束性	– 34 –
3.4	行列表現	– 38 –
3.5	数値計算による検討	– 41 –
3.5.1	近似誤差の収束性	– 42 –
3.5.2	計算効率	– 44 –
3.6	本章のまとめ	– 46 –
第 4 章	連続時間状態予測制御系の閉ループ極	– 47 –
4.1	問題設定	– 48 –

4.2	抽象的微分方程式表現の導出 . . . . .	- 49 -
4.3	閉ループスペクトルとそのダイナミクスへの影響 . . . . .	- 55 -
4.4	数値例 . . . . .	- 59 -
4.4.1	状態予測制御系に対する SO アプローチ . . . . .	- 59 -
4.4.2	計算結果 . . . . .	- 60 -
4.5	本章のまとめ . . . . .	- 61 -
第 5 章	連続時間入力むだ時間系に対する拡張状態予測制御	- 63 -
5.1	$A + BF$ の固有値以外の閉ループ極配置法 . . . . .	- 64 -
5.2	むだ時間長のミスマッチに対するロバスト安定性 . . . . .	- 66 -
5.3	数値例 . . . . .	- 68 -
5.3.1	スペクトル計算 . . . . .	- 68 -
5.3.2	ロバスト安定性 . . . . .	- 68 -
5.4	本章のまとめ . . . . .	- 71 -
第 6 章	おわりに	- 73 -
参考文献		- 76 -

## 表記

本論文では以下の表記を用いる.

$\mathbb{R}$  : 実数全体の集合

$\mathbb{R}_+$  : 正の実数全体の集合

$\mathbb{C}$  : 複素数全体の集合

$\mathbb{N}$  : 正の整数全体の集合

$\mathbb{N}_0$  : 非負の整数全体の集合

$\infty$  : 複素数の意味での無限遠点 (絶対値無限大, 偏角不定)

$+\infty$  ( $-\infty$ ) : 実数の意味での正 (負) の無限遠点

$\hat{\mathbb{C}}$  : 拡張複素平面 (リーマン球面)  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$f^{(p)}(\cdot)$  : 実数値関数  $f(\cdot)$  の  $p$  次導関数

$L_2[a, b]$  ( $L_2[a, b)$ ) : 区間  $[a, b]$  ( $[a, b)$ ) で Lebesgue 積分の意味で 2 乗可積分な実数値関数の全体をなす空間

$C^n[a, b]$  :  $n \in \mathbb{N}_0$  に対し区間  $[a, b]$  で  $f^{(0)}, \dots, f^{(n)}$  が存在し, 連続であるような実数値関数全体の空間

$C^n[a, b]$  :  $C^n[a, b]$  の定義域を  $[a, b]$  に制限したものの全体をなす空間

$\mathbb{R}^p$  :  $\mathbb{R}$  の  $p$  個の直積空間

$L_2([a, b]; \mathbb{R}^p)$  ( $C_n([a, b]; \mathbb{R}^p)$ ) :  $L_2[a, b]$  ( $C_n[a, b]$ ) の  $p$  個の直積空間

$I_p$  :  $p$  次の単位行列

$\mathcal{I}_{\mathcal{X}}$  : 線形空間  $\mathcal{X}$  上の恒等作用素

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}}$  : 線形空間  $\mathcal{X}$  上の内積

$\| \cdot \|_{\mathcal{X}}$  : 線形空間  $\mathcal{X}$  のノルム

$0_{p \times q}$  : サイズ  $p \times q$  の零行列, ただし  $p = q$  なら  $I_p$  と略記

$A \otimes B$  : 行列  $A = [a_{ij}]$  と行列 (作用素)  $B$  のクロネッカー積  $[a_{ij}B]$

$\mathcal{I}(\mathcal{A})$  : 作用素  $\mathcal{A}$  に対して  $\text{diag}[I, \mathcal{A}]$

$p!$  :  $p \in \mathbb{N}$  の階乗, ただし  $0! = 1$

${}_pP_q$  :  $p$  個の元から  $q$  個を選んで得られる順列の総数  $p!/(p-q)!$

$\lceil \cdot \rceil$  : 天井関数

$\| \cdot \|_i$  : 行列の誘導ノルム

$\oplus$  : 集合の直積

$\sigma(\cdot)$  : 作用素のスペクトル

$\sigma_p(\cdot)$  : 作用素の点スペクトル

$\rho(\cdot)$  : 作用素のレゾルベント集合

$\hat{\sigma}(\cdot)$  : 拡張複素空間における作用素のスペクトル

$\text{dom}(\cdot)$  : 作用素の定義域

$\text{Re}[\cdot]$  : 複素数の実数部

$\text{Im}[\cdot]$  : 複素数の虚数部

$A \succ 0 (A \prec 0)$  : 行列  $A$  が正定 (負定) 対称行列

行列のサイズが明らかであれば添字は省略する.  $C^n[a, b]$  において端点での微分可能性は片側微分可能性である. また,  $C^n(a, b)$  の区間右側の値を参照するときは左極限値を指す.

# 第 1 章

## はじめに

実際の制御現場においては、物質の搬送やデータ通信などに起因して遅れが発生し、それが制御系の安定性や制御性能に悪影響を与えることがある。そのような内部に時間遅れを含むシステムはむだ時間系と呼ばれ、古くから様々な検討がされている [1]。むだ時間系は状態を関数空間にとる抽象的な微分方程式で表されるため、無限次元システムとなる。そのため、有限次元系と比べ、その数学的な取り扱いは難しく、安定解析や制御系設計も簡単ではない [2]。その反面、むだ時間のない系に対してあえて時間遅れ要素をもつ制御器をもちいる手法も提案されており、周期軌道に対する安定化をおこなう遅延フィードバック制御 [3] や追従性能を向上させる繰り返し制御 [4] がこれにあたる。そのような実用的な要求と理論的な興味深さの両面を併せ持つことから、安定解析や制御系設計に関して数多くの研究がなされている [5, 6]。また、むだ時間系はいくつかのタイプに分類され、さらにそれらの表現方法も複数提案されている [7, 8]。そこで本章では、むだ時間系についての基礎事項を概観し、解析・設計に関する先行研究の一部をまとめる。その後、本論文の目的と構成を述べる。

### 1.1 むだ時間系の基礎事項

#### 1.1.1 分類

むだ時間系とは、そのダイナミクスが現在の情報のみならず、過去の情報にも依存するシステムのことであり、時間遅れをどのように含むかによって分類される。次の入力のないスカラの微分差分方程式について考えよう。

$$\alpha_0 \dot{x}(t) + \alpha_1 \dot{x}(t-h) + \beta_0 x(t) + \beta_1 x(t-h) = 0, \quad h > 0 \quad (1.1)$$



**定義 1.1** ([9]). 式 (1.1) について,  $\alpha_0 \neq 0$  かつ  $\alpha_1 = 0$  であれば遅れ型,  $\alpha_0 \neq 0$  かつ  $\alpha_1 \neq 0$  であれば中立型,  $\alpha_0 = 0$  かつ  $\alpha_1 \neq 0$  であれば進み型という.

また,  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$  ならば純粋な差分方程式であり,  $\beta_0 = \beta_1 = 0$  の場合も差分方程式に単純化できる.  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$  あるいは  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$  のときは常微分方程式となる.

外生入力  $u(t)$  が存在し, さらに遅れ  $h$  を伴って影響する場合, 例えば

$$\dot{x}(t) = \beta_0 x(t) + \gamma_1 u(t - h) \quad (1.2)$$

は入力むだ時間系と呼ばれる.

制御工学におけるこれらの取り扱いを簡単に述べる. 空圧系を駆動する際にはチューブの径や経路長に応じた入力遅れが, 鉄鋼の圧延プロセスではその構造から板厚のセンシング遅れが存在する. このように物理的な制約から入出力に遅れをもつ対象は多く, むだ時間系の中では比較的扱いやすいことから, 入力むだ時間系に対する検討は多数なされている. 入力むだ時間系への状態フィードバック適用など, 内部に遅れをもつ系の多くは遅れ型となるため非常に重要な対象のひとつである. 中立型は繰り返し制御系 [10] がこの形式となり重要なクラスではあるが, 数学的な扱いは遅れ型より難しい. 進み型は因果性の観点から物理的な系としては存在しないが, 数理経済学においては重要な問題である [11].

複数の遅れが存在する場合は以下のように分類される. 遅れ型に着目して,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^p \beta_i x(t - h_i), \quad h_i \in \mathbb{R}_+, \quad p \in \mathbb{N}, \\ 0 &= h_0 < h_1 < \cdots < h_p = h \end{aligned} \quad (1.3)$$

と表せる場合は離散遅れ (点遅れ),

$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^0 g(x(t + \eta)) d\eta \quad (1.4)$$

のように積分を含む場合は分布遅れと呼ばれる. 離散遅れについては, ある共通の  $\hat{h}$  が存在して,  $h_i = i\hat{h}$  となる場合は commensurate delays, そうでない場合は incommensurate delays といい, 前者のほうが取り扱いやすいことが知られている. 例えば, 状態予測制御は分布遅れをもつ制御則であり, 実装の際に定積分を近似することで, その閉ループ系は点遅れの中立型むだ時間系となることが示されている [12].

### 1.1.2 表現方法

むだ時間系の表現についてもいくつかの方法が提案されている．ここでは，関数微分方程式表現と無限次元系表現について簡単に説明する．

#### 関数微分方程式表現 [1]

関数微分方程式表現とは，前節で述べた微分差分方程式 (1.3) や積分微分方程式 (1.4) を一般的に表現する形式である． $x_t := x(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-h, 0]$ ,  $h \in \mathbb{R}_+$  とする．このとき，遅れ型の微分方程式は  $f_r : \mathbb{R} \oplus C([-h, 0]) \rightarrow \mathbb{R}$  により関数微分方程式

$$\dot{x}(t) = f_r(t, x_t) \quad (1.5)$$

と表現できる．とくに線形系であれば，

$$\dot{x}(t) = Lx_t, \quad L : C([-h, 0]) \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.6)$$

のように汎関数を用いて表される．この表現の利点は，いくらかの保守性を許容するのであれば，むだ時間系に対してよく知られた有限次元系に対する手法を適用できることである．また，汎関数を用いて表現された系に対して可制御性や可観測性の概念が拡張されている [14]．

#### 無限次元系表現 [7]

状態空間に関数空間を導入し，むだ時間系を見かけ上時間遅れの無い系として記述する方法が無限次元系表現である．例えば，式 (1.3) は抽象的な微分方程式として

$$\dot{x}_t = \mathcal{A}x_t, \quad \mathcal{A} : C([-h, 0]) \rightarrow C([-h, 0]) \quad (1.7)$$

のように表すことができる．ここで， $\mathcal{A}$  は系の状態遷移を記述する解作用素  $\mathcal{T}(t)$  の無限小生成作用素である．またむだ時間長毎の解の遷移を表すモノドロミ作用素を用いた無限次元離散系表現も導出されている [15]．これらに関しては次章以降で詳しく述べる．

この表現に関するメリットは，有限次元系の拡張として関数空間上で定義された系に対して適切に可制御性，可観測性が定義され，また安定性も作用素のスペクトルによって特徴づけられることである [7]．

## 1.2 安定解析

次の微分差分方程式で表現される遅れ型むだ時間系

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Gx(t-h), \quad h > 0, \quad A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x} \quad (1.8)$$

の安定解析について考える．有限次元系場合と同様に，むだ時間系の対する安定解析のアプローチも特性方程式，エネルギー関数，状態空間表現に基づくもの 3 つに大きく分類することができる．以下では，これらのアプローチのうちのいくつかの手法について概観する．

### 特性方程式アプローチ

むだ時間系 (1.8) が (漸近) 安定であることは特性超越方程式

$$\det(sI - A - e^{-sh}G) = 0 \quad (1.9)$$

の根が複素右半面に存在しないことと等価である [6]．また，上式の根は一般に無限個存在して，ある虚軸に平行な直線の左側にすべて分布することが知られている [9]．

有限次元系に対する特性方程式に基づく安定判別法として，Routh-Hurwitz の方法が有名であり，方程式の係数から安定性を判別する点が便利であることが知られている．遅れ型むだ時間系に対しては Routh-Hurwitz に対応した Pontryagin の方法 [5] が提案されている．この方法は，安定判別の必要十分条件を与える一方で，三角関数を含む関数の根を求める必要があることから計算が困難である．

そのため，比較的計算の容易なむだ時間に依存せず系が安定であるための十分条件が導出されており，例えば，

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\|I + hA\|_i - 1}{h} > \|G\|_i \quad (1.10)$$

が成り立てばよい [17]．もし，この上の条件が成り立たない場合，必ずしも計算は簡単ではない別のむだ時間に依存する条件により安定判別する方策が考えられている [18]．

参考文献 [19] では特性方程式の根の連続性に基づき行列ペンシルを用いて系が安定となるむだ時間の区間を求める画期的な手法が提案されている．まず，以下の 2 条件を検証する．

#### 1. $A + G$ がフルビッツ安定

2. 行列ペンシル  $\begin{bmatrix} I_{n_x^2} & 0 \\ 0 & G \otimes I_{n_x} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & -I_{n_x^2} \\ I_{n_x} \otimes G & A \otimes I_{n_x} + I_{n_x} \otimes A^T \end{bmatrix}$  が単位円周上に一般化固有値を持たない.

条件 2 は特性方程式が任意の  $h > 0$  に対して、虚軸上に根を持たないことと対応している. つまりむだ時間長  $h = 0$  で系が安定 (条件 1) であれば, すべての  $h > 0$  で特性根は虚軸上をまたがず系は不安定化しない. もし条件 2 が満たされず, 単位円周上に  $\ell$  個の一般化固有値  $z_k = e^{-j\alpha_k}$ ,  $1 \leq k \leq \ell$  をもつ場合, すなわちある  $h > 0$  で虚軸上に特性根をもつ場合には, 行列  $A + Ge^{-j\alpha_k}$  の固有値を  $j\omega_{ki}$  として

$$\bar{h} = \min_{1 \leq k \leq \ell} \min_{1 \leq i \leq n_x} \frac{\alpha_k}{\omega_{ki}}$$

を計算することで系が安定となる時間遅れの区間  $[0, \bar{h}]$  を算出できる. この手法は, 安定となる区間が複数ある場合にも対応しているが, 条件 1 が満たされない, つまり時間遅れがない場合に不安定な系は適用できない.

## エネルギー関数アプローチ

線形有限次元系の安定性は 2 次 Lyapunov 関数の存在性が必要十分であることがよく知られている. むだ時間系においては Lyapunov-Krasovskii (L-K) 汎関数がこれに相当する. 特に complete-type 二次 L-K 汎関数の存在性がむだ時間系の安定性と等価であることが明らかにされている [20]. しかしながら, complete-type L-K 汎関数の存在性を直接確かめることは非常に困難である. そこで, その存在条件をなんらかの意味で緩和することで様々な LMI [20] や SOS [21] 条件が導出されている. 例えば, 汎関数

$$V(x_t) = x(t)^T P x(t) + \int_{t-h}^t x(t+\tau)^T S x(t+\tau) d\tau, P \succ 0, S \succ 0 \quad (1.11)$$

はむだ時間に依存しない LMI 条件

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A + S & P G \\ G^T P & -S \end{bmatrix} \prec 0 \quad (1.12)$$

$$P \succ 0, S \succ 0 \quad (1.13)$$

を満たすときに L-K 汎関数となることが知られている。また、むだ時間に依存する LMI 条件として

$$P \succ 0, \begin{bmatrix} M & -PGA & -PG^2 \\ -A^T G^T P & -S_0 & 0 \\ -(G^2)^T P & 0 & -S_1 \end{bmatrix} \prec 0, \quad (1.14)$$

$$M = \frac{1}{h} [P(A + G) + (A + G)^T P] + S_0 + S_1$$

が知られており、上式を満たす対称行列  $P, S_0, S_1$  が存在すれば系は安定である。

また、いくつかの条件は状態フィードバックや出力フィードバックの設計問題に適用でき、応用しやすいといった特徴がある。一方で、安定性の必要十分条件を緩和して十分条件に対して数値計算を行うため、他の安定解析法と比べ、保守的な解析結果となる。

## 状態空間アプローチ

有限次元系の場合、システム行列の固有値が系の安定性を特徴づけるように、無限次元系表現されたむだ時間系の安定性は作用素のスペクトルによって判別できる。例えば、むだ時間系 (1.8) が抽象的な微分方程式 (1.7) で表現されている場合の安定条件は

$$\operatorname{Re}[\lambda] < 0 \text{ for all } \lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \quad (1.15)$$

である [7]。したがって、作用素のスペクトルを数値的に求めることができれば安定性を判別できる。無限小生成作用素を離散化する Infinitesimal Generator (IG) アプローチ [23]、解作用素を離散化する Solution Operator (SO) アプローチ [22] が提案されている。これらの方法には線形多段法や Runge-Kutta 法などに基づく離散化が適用される [24, 25, 26]。これらのアプローチでは、作用素を形式的なものとして扱うため、その近似の妥当性は作用素の収束性から直接議論されず、特性方程式を介して示される。

他方、むだ時間系をモノドロミ作用素を用いて表現し、それに基づきスペクトル計算する手法が提案されている。モノドロミ作用素は、解作用素にリフティング [27] を用いることで導出され、その表現は陽に与えられる。したがって、その数学的な性質に基づき作用素自体の収束性から直接近似手続きの数学的な妥当性を証明することができる。その離散化には高速サンプル/高速ホールド (FSFH) 近似を用いた手法が提案されている [28]。また、参考文献 [29, 30] では、補正型 FSFH 法を用いた手法、非因果的な 1, 3 次ホールド<sup>\*1</sup> を用いた手

---

<sup>\*1</sup> 次数が奇数であるのは、区間の両端点における関数値、導関数値を定めて補間をおこなうためである。

法 (FSFFOH, FSFHI 近似) が提案されており, FSFH 近似の欠点である時間刻み数増に対する近似誤差の収束の遅さが改善されている. これらの手法の中では, FSFHI 近似が最も近似誤差の収束が速く計算効率も優れていることが例示されている.

### 1.3 制御系設計

ここでは主に入力むだ時間系に対する制御系設計について述べる. 有限次元系に対する制御系設計のアプローチをそのままむだ時間系に適用することはむずかしい. これは通常のフィードバック制御が現時刻の目標入力と出力の偏差に基づいて, その偏差を小さくするように制御入力を修正するのに対して, 入出力に時間遅れを含む場合は制御入力の効果が即時に出力に反映されないためである. そのため, 制御入力の修正を適切におこなうことができず, 様々な制御性能の劣化や不安定化が引き起こされる [8]. このことから, 入出力に時間遅れをもつ系に対する効果的な制御方法として遅れ時間経過後の出力を予測し, それに基づき制御入力を修正することが考えられる. この方法を実現したのが Smith 法 [31] であり, 最もよく知られる入力むだ時間系への制御法といえる. そのブロック線図は Fig. 1.1 のようになり, 目標入力  $r$  から制御出力  $y$  までの伝達関数は

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} e^{-sh} \quad (1.16)$$

となる. 上式より, 特性多項式には時間遅れ要素が含まれないため, むだ時間のない系  $G(s)$  に対する設計法が適用できる. 一方で, 予測動作を含むことから制御対象の不確かさの影響を受けやすく, パラメータの僅かなミスマッチにより不安定化することがある. 制御対象とモデルのミスマッチに対して安定性を保持するとき, 実用安定であるといい, 様々な検討がなされている [8]. しかしながら, Smith 法は伝達関数ベースの設計であり, 適用対象は安定

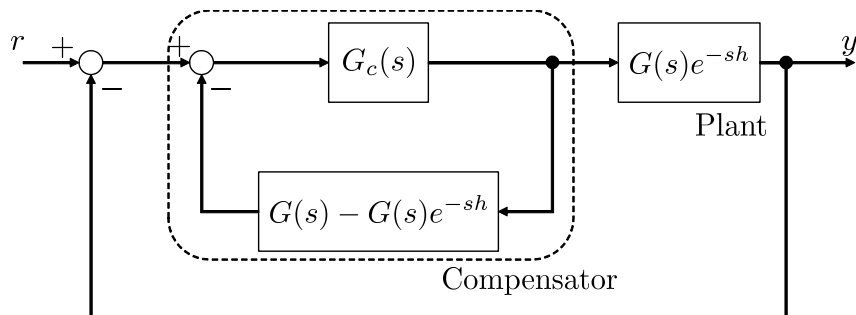


Fig. 1.1: スミス法

系のみに限定される。

これを解決したのが、状態空間ベースの設計法である状態予測制御である。制御則のコンセプトはむだ時間経過後の状態を予測し、それに基づいて状態フィードバックをおこなうことである。この手法は Manitius らによって有限極配置法 [32] として提案され、制御則に定積分の計算を含むことを許容すればシステム行列の次数と等しい数の極を指定でき、残りの極は自動的に消去されると述べられている。具体的には、入力むだ時間系

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - h), \quad A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad B \in \mathbb{R}^{n_x \times m_u} \quad (1.17)$$

が可制御であるとき、状態予測制御則はフィードバックゲイン  $F \in \mathbb{R}^{m_u \times n_x}$  を用いて

$$u(t) = F \left( e^{Ah} x(t) + \int_0^h e^{A(\tau)} Bu(t - \tau) d\tau \right) \quad (1.18)$$

で与えられる。このとき、閉ループ極は  $\sigma(A + BF)$  となる。また、これは入力むだ時間系に対する最適制御則となることが示されている [6]。

近年では、入力むだ時間系を集中定数系と偏微分方程式で表される搬送系の直列結合とみなし、これに backstepping 変換を適用することで、状態予測制御が導かれることが示されている [33]。この一見複雑な手続きは、閉ループ系の PDE-LTI 接続表現に基づき、L-K 汎関数を陽に与えることを可能としている。

状態予測制御は、オブザーバ併合系、サーボ系、 $H^\infty$  制御問題などの設計問題へ拡張がなされている [6]。むだ時間長とゲインのミスマッチに対するロバスト安定性 [34, 35] や制御則実装の際の積分数値計算における近似誤差の影響 [36, 12] についても明らかにされている。さらに、遅れ型や中立型に対する有限極配置アルゴリズムも提案されている [8]。

ここまでは連続時間系について述べてきたが、本節の最後として離散時間系に対する状態予測制御について触れる。連続時間の場合と異なり、離散時間におけるむだ時間系は本質的に有限次元系となるため、ある行列表現に基づいて閉ループ極配置を議論できる [37]。入力むだ時間系

$$x_d(k+1) = A_d x_d(k) + B_d u_d(k-D), \quad D \in \mathbb{N}, \quad (1.19)$$

$x_d \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $u_d \in \mathbb{R}^{m_u}$ ,  $A_d \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B_d \in \mathbb{R}^{n_x \times m_u}$  について考える。対  $(A_d, B_d)$  が可到達であるとする、 $A_d + B_d F_d$  が Schur 安定となる状態フィードバックゲイン  $F_d$  が存在する。ここで、状態空間を拡張し、

$$X_d(k) := [x_d(k)^T \quad u_d(k-D)^T \quad \cdots \quad u_d(k-1)^T]^T,$$

とすると、式 (1.19) は陽に時間遅れを含まない以下の形式で表せる。

$$X_d(k+1) = \begin{bmatrix} A_d & B_d & 0 \\ 0 & 0 & I_{m(D-1)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X_d(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix} u_d(k) \quad (1.20)$$

これに対する状態フィードバック制御則を

$$u_d(k) = [K_D \quad K_{D-1} \quad \cdots \quad K_0] X_d(k), \quad (1.21)$$

とすると、閉ループ系の状態遷移は

$$X_d(k+1) = \tilde{A}_d X_d(k), \quad (1.22)$$

となる。ただし、

$$\tilde{A}_d := \begin{bmatrix} A_d & B_d & 0 \\ 0 & 0 & I_{m(D-1)} \\ K_D & K_{D-1} & K_{D-2} \quad \cdots \quad K_0 \end{bmatrix}$$

である。したがって式 (1.19) の安定化問題は式 (1.22) が Schur 安定となるゲイン  $K_i$  を選ぶことと等価である。

連続時間の場合と同様に、離散時間状態の予測制御もむだ時間経過後の状態を予測して、それにより状態フィードバックを施すことが基本的な方策である。すなわち、制御則は

$$\begin{aligned} u_d(k) &= F_d x_d(k+D) \\ &= F_d \left\{ A_d^D x_d(k) + \sum_{j=k-D}^{k-1} A_d^{k-j-1} B_d u_d(j) \right\} \end{aligned} \quad (1.23)$$

で与えられる。このとき、 $K_i$  は

$$K_D = F_d A_d^D, \quad K_j = F_d A_d^{D-j} B_d, \quad j = 0, \dots, D-1. \quad (1.24)$$

となる。参考文献 [38] では入力むだ時間系 (1.19) に対する最適制御則は状態予測制御則の構造となることを明らかにしている。また、このとき、閉ループ極は  $A_d + B_d F_d$  の固有値と重複度  $m_u D$  の原点極によって構成される [37, 39]。さらに  $K_i$  の決定法を工夫することで、その原点極を重複度  $m_u$  の極として任意に配置できることが示されている [40]。これを発展させ参考文献 [41] では、すべての極を任意に配置するゲイン設計のアルゴリズムを提案した。そのときの制御ゲインは新たな設計の自由度  $M_i \in \mathbb{R}^{m_u \times m_u}$ ,  $i = 0, \dots, D-1$  を用いて

$$K_i = \begin{cases} F_d A_d^D - \sum_{j=0}^{D-1} M_j F_d A_d^{D-j-1}, & (i = D), \\ M_i + F_d A_d^i B_d - \sum_{j=0}^{i-1} M_j F_d A_d^{i-j-1} B_d, & (\text{otherwise}), \end{cases} \quad (1.25)$$



$i = 0, \dots, D$  と書き下すことができる. このときの閉ループ極は  $A_d + B_d F_d$  とブロックコンパニオン行列

$$\begin{bmatrix} 0 & I_m & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & I_m \\ M_{D-1} & M_{D-2} & \cdots & M_0 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

の固有値となる.

## 1.4 研究目的・本論文の構成

ここまで述べた通り, むだ時間系に関する研究はタイプや表現方法に応じて分類され, 解析・設計のアプローチは非常に多岐にわたっている. そのため, 理論的に包括的な理解が得られているとはいいがたい面もある. そこで本研究では, 無限次元システム理論に基づくことで, より数学的に厳密なむだ時間系の安定解析・制御系設計を検討することを目的とする. とくに, 連続時間むだ時間系に対して, i) 高次ホールド近似を用いた遅れ型むだ時間系の安定解析, ii) 状態予測制御系のスペクトル解析と制御則の拡張を扱う. 具体的には, 以下のことを検討する.

### ・高速サンプル/ホールド近似に基づくモノドロミ作用素のスペクトル計算法

ホールド関数として 0, 1, 3 次多項式を用いる従来研究では, その数値例から次数の増加に伴って計算効率が改善する傾向があることが示されている. 時間刻み数が同じであれば, ホールド多項式次数を増やすと, モノドロミ作用素の近似行列の次数も増加する. しかし前述の範囲においては, あるスペクトル計算精度を要求した場合の, 多項式次数増による影響よりも時間刻み数の削減効果ははるかに大きいため, 結果的に近似行列の次数が低下し, 計算効率がよくなっている. 一方, 近似多項式の次数増に対して計算効率がどこまでも単調に良くなるとは考えにくい. そこで, より高次の多項式を用いた場合の計算効率の挙動を解明することを主目的に据える. しかし理論的には, ホールド多項式の次数はモノドロミ作用素が定義される関数空間の滑らかさと対応しているため, それぞれの関数空間において近似が妥当であることを数値計算に先立って (帰納的に) 保証しなければならない. 従来研究での証明はそのような拡張性に欠けており, これが解決すべき具体的課題のひとつである. また, 一般のホールド多項式次数に対応した, 近似公式も導出しなければならない. 以上の点を解

決した後に、数値例を用いて、近似の妥当性を確認し、最終的に高次ホールド近似を用いた場合の計算効率の改善効果について検討する。

## ・作用素表現に基づく状態予測制御の閉ループ極解析と拡張状態予測制御

1.3 節で述べたように、参考文献 [32] では状態予測制御はシステム行列の次数と同じ数の極を配置でき、それ以外は自動的に消去されると述べられている。しかしながら、閉ループ内部にはむだ時間要素が存在するため、これに対応する極がなんらかの形で存在すると考えられる。他の文献においては、それ以外は  $-\infty$  に存在するとの記述も見受けられるが、数学的に根拠が示されているものは見当たらない。そこで、まず状態予測制御の閉ループ系を無限次元系として表現し、そのスペクトルを解析することで  $A + BF$  の固有値以外の極が  $-\infty$  に存在することを数学的に示す。その後、それらが閉ループ動特性にどのように関与するのかを明らかにする。また、数値例を用いて閉ループ極の分布を確かめる。

また、離散時間系においては  $A + BF$  の固有値以外の閉ループ極を任意に配置する手法が提案されており、その利点は議論されていないものの、デッドビート制御的に配置された原点極を動かせることからロバスト性を含む性能の向上が期待できる。このことに動機づけられ、連続時間系に対して設計の自由度を拡張した状態予測制御則の導出をおこなう。その後、むだ時間長のミスマッチに対するロバスト安定性について検証し、提案法を用いた場合の改善効果について数値例を通じて考察する。

本論文の構成は以下のとおりである。まず、第 2 章でそれ以降で必要となる数学的準備について述べる。第 3 章では、遅れ型むだ時間系のモノドロミ作用素に基づく安定解析法を取り扱う。まず、高次ホールド関数を用いた場合の近似手続きの数学的妥当性を示し、それに基づくスペクトル計算法を導出する。その後、高次ホールド近似による計算効率の改善効果とその限界について考察する。第 4 章では、状態予測制御系を無限次元系表現を導出し、そのスペクトル分布を解析する。また、数値例により、その理論的検証の裏付けをする。第 5 章では、離散時間の拡張状態予測制御に対するアナロジーから、 $-\infty$  に存在する極を有限領域に配置する制御則を提案する。また、そのときのむだ時間長ミスマッチに対するロバスト安定性について考察する。第 6 章で本論文のまとめをおこない、今後の課題について述べる。

## 第 2 章

# 数学的準備

### 2.1 ノルム空間に関する定義と性質

#### ノルム [42]

いま  $k \in \mathbb{N}_0$  に対し  $C^k[a, b]$  上のノルムを

$$\|f\|_{C^k[a, b]} = \sum_{i=0}^k \sup_{t \in [a, b]} |f^{(i)}(t)| \quad (2.1)$$

で与えるとき,  $C^k[a, b]$  はバナッハ空間となる. また,  $L_2[a, b]$  上の内積を

$$\langle f, g \rangle := \int_0^h f(t)g(t)dt, \quad f, g \in L_2[a, b]$$

とする. このときノルムを

$$\|f\|_{L_2[a, b]} = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

とおけば,  $L_2[a, b]$  はヒルベルト空間をなす.

#### コンパクト性 [43]

有限次元の Euclid 空間の有界閉集合に似た概念として, コンパクトと呼ばれる性質が知られている<sup>\*1</sup>.

**定義 2.1.** 距離空間  $\mathcal{R}$  の任意の無限部分集合が少なくともひとつの集積点をもつとき  $\mathcal{R}$  をコンパクトであるという.

---

<sup>\*1</sup> 本論文では位相空間ではなく距離空間のみについて考える.

また、距離空間においてはコンパクト性は次の全有界性と密接に結びついている。

**定義 2.2.** いま  $M$  を距離空間  $\mathcal{R}$  の中のある集合、 $\epsilon$  をある正の数とする。距離を  $d(\cdot, \cdot)$  で表すとき、 $\mathcal{R}$  の点集合  $A$  が  $M$  に対して  $\epsilon$ -網であるとは、任意の点  $x \in M$  に対して  $d(a, x) \leq \epsilon$  なる  $a \in A$  が少なくとも一つ存在することをいう。

**定義 2.3.** 任意の  $\epsilon > 0$  に対して、集合  $M$  に対する有限個の点からなる  $\epsilon$ -網が存在するとき、 $M$  は全有界であるという。

ある距離空間  $\mathcal{R}$  がコンパクトであることは、 $\mathcal{R}$  が全有界かつ完備であることが必要十分である。

また、空間  $\mathcal{R}$  の部分集合は閉でなければコンパクトに成り得ない。しかし、その閉包がコンパクトになることはしばしば起こりうる。そのような集合は相対コンパクト呼ばれ、次のように定義される。

**定義 2.4.** 距離空間  $\mathcal{R}$  の部分集合  $M$  の閉包  $\overline{M}$  がコンパクトなとき、 $M$  は ( $\mathcal{R}$  において) 相対コンパクトであるという。

また、相対コンパクト性も全有界性によって特徴づけることができる。

**定理 2.5.** 完備距離空間における部分集合が相対コンパクトであることは全有界であることと必要十分である。

解析において、この相対コンパクト性は重要な役割を果たすが、一般に相対コンパクト性を示すよりも全有界性を示すほうが易しいという点で上記の定理は有用である。

より具体的な空間の中の集合については、実用上便利なコンパクト性の判定条件が知られている。距離空間  $C[a, b]$  (本論文の記法では  $C^0[a, b]$ ) の部分集合に対する相対コンパクト性の判定法を与えるのが Arzelà の定理であるが、これを述べるために関数族に対して次の概念を導入する：

**定義 2.6.** 関数族  $\Phi$  に対して、 $|\phi(t)| \leq K, \forall t \in [a, b], \forall \phi \in \Phi$  なる  $K$  が存在するとき、 $\Phi$  は一様有界であるという。また、関数族  $\Phi$  に対して、 $\forall \epsilon > 0$  が与えられたとき、 $|t_1 - t_2| < \delta$  なるすべての  $t_1, t_2 \in [a, b]$  および  $\forall \phi \in \Phi$  に対して、 $|\phi(t_1) - \phi(t_2)| < \epsilon$  となるような  $\delta > 0$  が存在するとき、 $\Phi$  は一様同程度連続であるという。

定理 2.7 (Arzelà). 閉区間  $[a, b]$  で定義された連続関数の族  $\Phi$  が  $C[a, b]$  において相対コンパクトであるための必要十分条件は, この族が一様有界かつ一様同程度連続であることである.

## 2.2 作用素に関する定義と性質 [44]

抽象的な微分方程式によってむだ時間系の問題を取り扱うとき, 微分作用素は非有界作用素として取り扱う必要がある. しかしながら, この場合は全く一般の非有界作用素と比べれば, よい性質をもっていることが知られている.

そこで本節では, 次章以降で重要となる性質のよい作用素について, 有界作用素を通して準備する. 具体的には, 有界ではないがスペクトルに関して見通しの良い性質をもつ閉作用素と有限次元の性質を多く保持しているコンパクト作用素についての性質を列挙する.

なお,  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  はバナッハ空間とする.

### 有界作用素

定義 2.8.  $\mathcal{T}$  を  $\mathcal{X}$  から  $\mathcal{Y}$  の線形作用素とすると,

$$\|\mathcal{T}f\|_{\mathcal{Y}} \leq \alpha \|f\|_{\mathcal{X}}, \quad f \in \mathcal{X}$$

を満たす定数  $\alpha$  が存在するならば,  $\mathcal{T}$  は有界であるという.

定義 2.9.  $\mathcal{X}$  から  $\mathcal{Y}$  の作用素  $\mathcal{T}$  のうち, 以下の 2 条件を満足するもの全体を  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  とで表し, とくに  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$  は  $\mathcal{L}(\mathcal{X})$  とする.

1.  $\text{dom}(\mathcal{T}) = \mathcal{X}$
2.  $\mathcal{T}$  は有界である.

定義 2.10.  $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  とするとき,

$$\|\mathcal{T}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = \sup_{f \neq 0} \frac{\|\mathcal{T}f\|_{\mathcal{Y}}}{\|f\|_{\mathcal{X}}}$$

とおく.  $\|\mathcal{T}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$  を  $\mathcal{T}$  の作用素ノルムといい, 空間が明らかなきは,  $\|\mathcal{T}\|$  と表記する.

## 閉作用素

ある作用素が有界か否かはどのようなノルム空間からどのようなノルム空間への作用素とみるかによって変わる. すなわち, これは問題を扱いやすい空間で考えればよいことになるが, 微分方程式などについては, ひとつの空間における作用素として取り扱うことが望ましく, 非有界作用素を考える必要がある. そのような際に, 定義域についてノルムを付け替えて完備になるのであれば, 比較的扱いやすいクラスの作用素となることが知られている.

$\mathcal{T}$  を  $\mathcal{X}$  から  $\mathcal{Y}$  への線形作用素とする.  $\mathcal{T}$  の定義域  $\text{dom}(\mathcal{T})$  に属する  $f$  に対して

$$\|f\|_{\text{dom}(\mathcal{T})} = \|f\|_{\mathcal{X}} + \|\mathcal{T}f\|_{\mathcal{Y}}, \quad f \in \text{dom}(\mathcal{T})$$

とする. このとき  $\|f\|_{\text{dom}(\mathcal{T})}$  は  $\text{dom}(\mathcal{T})$  上のノルムであり,  $\mathcal{T}$  による  $f$  のグラフノルムという.

**定義 2.11.**  $\mathcal{T}$  の定義域  $\text{dom}(\mathcal{T})$  の  $\mathcal{T}$  によるグラフノルムが完備であるとき, すなわち,  $\text{dom}(\mathcal{T})$  が  $\mathcal{T}$  によるグラフノルムのもとでバナッハ空間をなすとき,  $\mathcal{T}$  は閉作用素であるという.

閉作用素のもつ有用な性質は数多くあるが, とくに本論文で用いる定理を列挙する.

**定理 2.12.** (閉作用素の性質)

1.  $\mathcal{T}$  が閉作用素かつ 1 対 1 ならば  $\mathcal{T}^{-1}$  も閉作用素である.
2.  $\mathcal{T}_1$  が閉作用素,  $\mathcal{T}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  ならば,  $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$  は閉作用素である.

また, 閉作用素の列  $\mathcal{T}_p$  が  $\mathcal{T}$  に収束することは以下の定理で特徴づけられる.

**定理 2.13.** ([45] IV-§2.6)  $\mathcal{T}, \mathcal{T}_p, p = 1, 2, \dots$  は閉作用素とする.  $\mathcal{T}$  が有界作用素であるとき, generalized sense で  $\mathcal{T}_p \rightarrow \mathcal{T}$  となるための必要十分条件は, 十分大きな  $i$  に対して  $\mathcal{T}_p$  が有界作用素かつ  $\|\mathcal{T}_p - \mathcal{T}\| \rightarrow 0$  となることである.

## コンパクト作用素

前述の通り, コンパクト作用素は有限次元における性質を相当に保持しているクラスの作用素として知られており, 相対コンパクト性や全有界性の概念により以下のように特徴づけ

られる.

**定義 2.14.** バナッハ空間  $\mathcal{X}$  からバナッハ空間  $\mathcal{Y}$  への線形作用素  $\mathcal{T}$  に関して次の条件は同値である.

1.  $\mathcal{T}$  はコンパクト作用素である.
2.  $\mathcal{X}$  の任意の有界列  $\{f_p\}$  の像  $\{\mathcal{T}f_p\}$  が収束する部分列  $\{\mathcal{T}f_{p'}\}$  を含む.
3.  $\mathcal{X}$  の任意の有界集合  $\mathcal{X}'$  に関して  $\mathcal{T}\mathcal{X}'$  は  $\mathcal{Y}$  の相対コンパクト集合である.
4.  $\mathcal{X}$  の任意の有界集合  $\mathcal{X}'$  に関して  $\mathcal{Y}$  の部分集合  $\mathcal{T}\mathcal{X}'$  は全有界である.

## 2.3 スペクトルに関する定義と性質

ここでは, 前節で述べた “性質の良い” 作用素についてのスペクトルに関する特徴を記載する.

次の定理は抽象的微分方程式表現された系のスペクトル解析に用いられる.

**定理 2.15.** ([45] Theorem III-6.26)  $\mathcal{T}$  がバナッハ空間  $\mathcal{X}$  上の閉作用素とする. そのレゾルベント  $R(\lambda, \mathcal{T}) = (\lambda I - \mathcal{T})^{-1}$  が存在して, いくつかの  $\lambda$  でコンパクトであるならば,  $\mathcal{T}$  のスペクトルはすべて重複度有限の孤立固有値となる.

無限遠点におけるレゾルベントを介して以下の定理が知られている.

**定理 2.16.** ([45] Theorem III.6.13)  $\mathcal{T}$  を空間  $\mathcal{X}$  上の閉作用素,  $\rho(\mathcal{T})$  はある円の外部を含むとする. このとき次のどちらかを満たす.

1.  $\mathcal{T}$  は  $\mathcal{X}$  上の有界作用素;  $\lambda = \infty$  で  $(\lambda I - \mathcal{T})^{-1}$  は正則, かつ  $(\lambda I - \mathcal{T})^{-1} = 0$ .
2.  $\lambda = \infty$  は  $(\lambda I - \mathcal{T})^{-1}$  の真性特異点.

とくにコンパクト作用素に着目すれば, そのスペクトルは次のようになる

**定理 2.17.** ([44] 定理 9.7) コンパクト作用素  $\mathcal{T}$  のスペクトル  $\sigma(\mathcal{T})$  の 0 と異なる部分は, たかだか可算個の点からなる:

$$\sigma(\mathcal{T}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \neq 0\} = \{\lambda_p\}. \quad (2.2)$$

$\{\lambda_p\}$  が可算無限の場合は  $\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p = 0$  である. 各  $\lambda_p$  は  $\mathcal{T}$  の固有値で, その重複度は有

限である.

次に, スペクトルの連続性について述べる. まず有限次元の作用素  $T(\kappa)$  について考える ([45] II-§5.2).  $T(\kappa)$  が  $\kappa$  について連続であるならば,  $T(\kappa)$  の固有値も  $\kappa$  について連続に変化する ([45] Theorem 5.1). いま,  $T(\kappa)$  の次元は  $m$  として, その固有値を代数的重複度にしたがって繰り返し数え, 順序付けされていない  $m$  個の複素数の組 ( $m$ -tuple) を作る. 2 つの  $m$ -tuple  $\mathcal{O} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ ,  $\tilde{\mathcal{O}} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m)$  について考え, 距離を

$$\text{dist}(\mathcal{O}, \tilde{\mathcal{O}}) = \min \max_p |\lambda_p - \tilde{\lambda}_p| \quad (2.3)$$

と定義する. ただし,  $\min$  は片方の  $m$ -tuple の要素を番号付けするあらゆる方法についてとる. このとき固有値の連続性は,  $T(\kappa)$  の固有値の重複度も考慮して構成された  $m$ -tuple  $\mathcal{O}(\kappa)$  が  $\kappa$  とともに連続に変化する, と表現することができる. これはある  $\kappa_0$  に対して  $\kappa \rightarrow \kappa_0$  とするとき,  $\text{dist}(\mathcal{O}(\kappa), \mathcal{O}(\kappa_0)) \rightarrow 0$  となることを意味する.

これを踏まえて, 一般の作用素に対して以下のように有限固有値系を定義する.

**定義 2.18.** ([45] III-§6.5) 作用素  $\mathcal{T}$  のスペクトル  $\sigma(\mathcal{T})$  のうち, 重複度が有限の固有値の有限集合を有限固有値系と呼び,  $\sigma'(\mathcal{T})$  で表す.

このとき, スペクトルの連続性は次の定理で特徴づけられる.

**定理 2.19.** ([45] IV-§5.3)  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{T}_p$ ,  $p = 1, 2, \dots$  は閉作用素とする. また,  $\sigma'(\mathcal{T})$  の次数を  $m$  とし, 有限固有値系  $\sigma'(\mathcal{T})$ ,  $\sigma'(\mathcal{T}_p)$  の  $m$ -tuple をそれぞれ  $\mathcal{O}'(\mathcal{T})$ ,  $\mathcal{O}'(\mathcal{T}_p)$  で表す.  $\mathcal{T}_p \rightarrow \mathcal{T}$  が成り立てば,  $\text{dist}(\mathcal{O}'(\mathcal{T}), \mathcal{O}'(\mathcal{T}_p)) \rightarrow 0$  となる.

## 2.4 作用素を用いたシステム表現

### 2.4.1 サンプル値制御系

サンプル値制御とは, 連続時間で動作する制御対象  $\Sigma_f$  に対して離散時間で動作する離散時間補償器  $\Sigma_c$  によって制御をおこなうものである [46]. 一定時間  $h$  ごとに連続時間信号を取り出すサンプラ  $\overline{\mathcal{S}}$  と, 同じく  $h$  時間ごとに離散値信号を連続信号に変換し出力するホールダ  $\overline{\mathcal{H}}$  を用いて構成され, 例えば直結フィードバック系は Fig. 2.1 のようになる.

サンプル値制御系では, 連続時間系と離散時間系が混在するために, システム全体が時不変系とならず, 通常の枠組みでは伝達関数, 周波数応答などの概念が適用できない. 連続時間



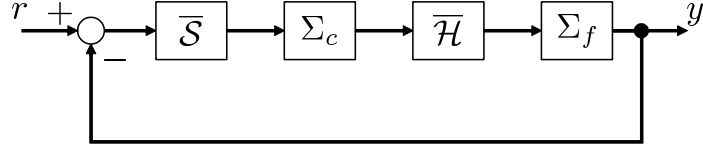


Fig. 2.1: 単一フィードバックサンプル値制御系

系である制御対象を零次ホールド等価離散化すれば時不変系となるものの、サンプル点間の挙動を無視することになり、リップルが生じることがある。そこで、リフティングという技法により、サンプル点間の情報を保存したまま連続時間系を離散時間系として記述する方法が提案されている。

リフティングとは、区間  $[0, \infty)$  の連続時間信号を細かい区間の連続時間信号の数列として表現すること、すなわち、ある関数  $\phi(t) \in L_2[0, \infty)$  <sup>\*2</sup> とある正数  $h > 0$  に対して次の対応を与えることである：

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : L_2[0, \infty) &\rightarrow L_2[0, h) : \phi(t) \mapsto \{\hat{\phi}_\nu(\theta)\}_{\nu=0}^\infty, \\ \hat{\phi}_\nu(\theta) &:= \phi(\nu h + \theta), \theta \in [0, h). \end{aligned} \quad (2.4)$$

これを用いて、連続時間系

$$\Sigma_f : \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t) \quad (2.5)$$

を離散化しよう。ただし、 $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $u \in \mathbb{R}^{m_u}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{m_y}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n_x \times m_u}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m_y \times n_x}$  とする。  $x_\nu := x(\nu h)$  としてリフティングの定義を用いると、次のサンプル時刻  $t = (\nu + 1)h$  での状態とその間の出力は

$$x_{\nu+1} = e^{Ah}x_\nu + \int_0^h e^{A(h-\tau)}B\hat{u}_\nu(\tau)d\tau, \quad (2.6)$$

$$\hat{y}_\nu(\theta) = Ce^{A\theta}x_\nu + \int_0^\theta Ce^{A(\theta-\tau)}B\hat{u}_\nu(\tau)d\tau \quad (2.7)$$

と表せる。このとき、上式は  $x_\nu$ ,  $\hat{u}_\nu(\theta)$ ,  $\hat{y}_\nu(\theta)$ ,  $\nu = 0, 1, \dots$  について線形時不変な状態遷移式となっている。また、作用素表現すれば

$$\begin{bmatrix} x_{\nu+1} \\ y_\nu(\theta) \end{bmatrix} = \bar{\mathcal{F}} \begin{bmatrix} x_\nu \\ u_\nu(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

<sup>\*2</sup> 別の関数空間、例えば  $C^0[0, h)$  でもよい。

となり, 具体的には

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{F}} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{F}}_{11} & \bar{\mathcal{F}}_{12} \\ \bar{\mathcal{F}}_{21} & \bar{\mathcal{F}}_{22} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^{n_x} \oplus L_2([0, h]; \mathbb{R}^{m_u}) \rightarrow \mathbb{R}^{n_x} \oplus L_2([0, h]; \mathbb{R}^{m_y}) \\ \bar{\mathcal{F}}_{11} &= e^{Ah} =: A_d, \\ \bar{\mathcal{F}}_{12}\hat{u} &= \int_0^h e^{A(h-\tau)} B \hat{u}(\tau) d\tau, \\ (\bar{\mathcal{F}}_{21}x)(\theta) &= C e^{A\theta} x, \\ (\bar{\mathcal{F}}_{22}\hat{u})(\theta) &= \int_0^\theta C e^{A(\theta-\tau)} B \hat{u}(\tau) d\tau\end{aligned}$$

である.

一般化プラント  $\Sigma_g$  に対してサンプル値制御系を構成するとき, その周波数応答を計算する方法のひとつとして, 入出力のサンプリング時間  $h$  をより速い間隔  $h/N$  でサンプル/ホールドする作用素  $\bar{\mathcal{S}}_{h/N}, \bar{\mathcal{H}}_{h/N}$ , を用いて系を離散近似する手法が知られている (Fig. 2.2) [47]. これがサンプル値制御系における高速サンプル/高速ホールド近似であり, モノドロミ作用素のスペクトル計算に用いる FSFH 近似はこれと類似した手法である.

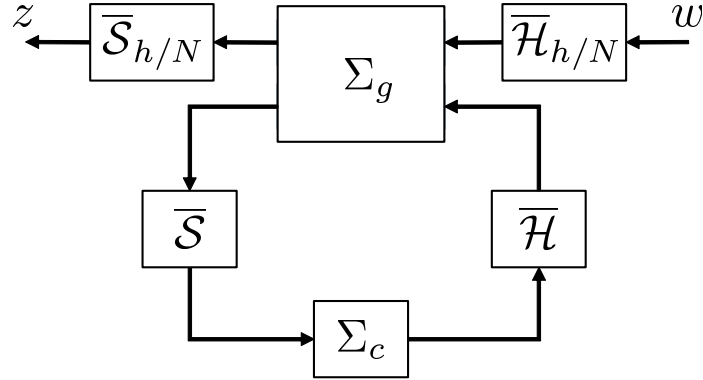


Fig. 2.2: サンプル値系の高速サンプル/ホールド近似

#### 2.4.2 遅れ型むだ時間系 [7]

ここでは遅れ型むだ時間系の作用素表現について述べる. まず, 準備として強連続半群とその無限小生成作用素を定義する.

**定義 2.20.** ヒルベルト空間  $\mathcal{X}$  における作用素の族  $\{\mathcal{T}(t)\}_{t \geq 0} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$  が強連続半群

( $C_0$ -半群) であるとは,

$$\mathcal{T}(t + \tau) \text{ for } t, \tau \geq 0 \quad (2.9)$$

$$\mathcal{T}(0) = \mathcal{I}_{\mathcal{X}} \quad (2.10)$$

$$\|\mathcal{T}(t)z_0 - z_0\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow 0_+, \forall z_0 \in \mathcal{X} \quad (2.11)$$

が成り立つことである.

**定義 2.21.** 強連続半群  $\{\mathcal{T}(t)\}_{t \geq 0}$  の無限小生成作用素とは, その定義域  $\text{dom}(\mathcal{A})$ , および対応  $\text{dom}(\mathcal{A}) \ni z_0 \mapsto \mathcal{A}z_0 \in \mathcal{X}$  が以下のように定められる作用素  $\mathcal{A}$  のことである.

$$1. \text{dom}(\mathcal{A}) = \left\{ z_0 \in \mathcal{X} \mid \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\mathcal{T}(t)z_0 - z_0}{t} \text{ が存在する.} \right\}$$

$$2. \mathcal{A}z_0 = \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\mathcal{T}(t)z_0 - z_0}{t}, \quad (z_0 \in \text{dom}(\mathcal{A}))$$

強連続半群  $\mathcal{T}(t)$ ,  $t \geq 0$  は有限次元系でいう行列指数関数  $T(t) = e^{At}$  に対応している.  $T(t)$  から  $A$  を求めるためには,  $T(t)$  の  $t = 0$  での微係数を求めればよく, 同様の発想で無限小生成作用素  $\mathcal{A}$  が定義されている.

以上の準備のもと, 遅れ型むだ時間系 (1.8) の抽象的微分方程式表現を導出する. いま, 初期条件  $x(0) = x_0$ ,  $u(\theta) = f_0(\theta)$ ,  $\theta \in [-h, 0)$  が与えられるとする. ただし,  $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $f_0(\cdot) \in L_2([-h, 0]; \mathbb{R}^{n_x})$  である. ここで, 以下のように内積を定義したヒルベルト空間  $\mathcal{H} := \mathbb{R}^{n_x} \oplus L_2([-h, 0]; \mathbb{R}^{n_x})$  を定める.

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ f_1(\cdot) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2(\cdot) \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} := \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{R}^{n_x}} + \langle f_1, f_2 \rangle_{L_2([-h, 0]; \mathbb{R}^{n_x})}$$

また, 空間  $\mathcal{H}$  におけるノルムは

$$\left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ f_1(\cdot) \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ f_1(\cdot) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ f_1(\cdot) \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

により与える. このとき, 解  $x(\cdot)$  を表す  $\mathcal{H}$  上の作用素を

$$\mathcal{T}(t) \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t + \cdot) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

と定義すると,  $\mathcal{T}(t)$  は  $\mathcal{H}$  上の強連続半群となる.

このとき,  $\mathcal{T}(t)$  の無限小生成作用素  $\mathcal{A}$  は具体的に

$$\mathcal{A} \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_0 + Gf_0(-h) \\ \frac{df_0}{d\theta}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

と表され, その定義域は

$$\text{dom}(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \mid f_0 \text{ は絶対連続かつ } \frac{df_0}{d\theta} \in L_2([-h, 0]; \mathbb{R}^{n_x}), x_0 = f_r(0) \right\}$$

となる. したがって,  $\mathcal{H}$  上の抽象的微分方程式表現は

$$\dot{X}(t) = \mathcal{A}X(t), \quad X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

で与えられる. また  $\mathcal{A}$  のスペクトルは  $\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(\lambda I - A - Ge^{-\lambda h}) = 0\}$  であり, 多重度有限の固有値 (点スペクトル) で構成される.

## 第 3 章

# モノドロミ作用素表現を用いた遅れ型むだ時間系の安定解析

遅れ型むだ時間系の表現方法として、むだ時間長毎の状態遷移を表すモノドロミ作用素を用いた方法が提案されており [48], 遅延フィードバック制御を適用された状態にジャンプをもつ線形系の安定解析に応用されている [49]. このモノドロミ作用素表現はサンプル値制御理論と関連が強く、解作用素をむだ時間長ごとにリフティングすることで導出される. また, そのスペクトルの近似計算法として, 作用素の出力を高速サンプル/高速零次ホールドする FSFH 近似が提案されている [28]. この方法は時間刻み数増に対する近似誤差の収束の遅さが問題であったが, 後に提案された高速リフティングに基づく補正型 FSFH 法を用いた手法 [29], 非因果的な 1, 3 次ホールドを用いた手法 (FSFFOH, FSFHI 近似) [30] ではこの欠点であるが改善されている. これらの手法の中では, FSFHI 近似が最も近似誤差の収束が速く計算効率も優れていることが例示されている. これは, この範囲においてあるスペクトル計算精度を要求した場合, 高次情報を考えることによる近似行列表現の次数増の影響よりも, 時間刻み数の削減効果が大きいことを示している.

しかし, 近似多項式の次数増に対して計算効率がどこまでも単調によくなるとは考えにくいため, より高次の多項式を用いた場合の挙動を明らかにすることが望まれる. この動機のもと, 本章では, 一般の奇数次多項式ホールド関数による近似を合理的に導入し, これを用いた際の計算効率の改善とその限界について数値例を通して検討する.

本章の構成は次の通りである. まず第 1 節で問題設定について述べ, 第 2 節で近似に用いる一般化サンプリング/ホールド作用素を導入する. ホールド多項式の次数はモノドロミ作用素を考える関数空間の滑らかさに対応しているため, それぞれの関数空間においての近似

の理論的な妥当性を第 3 節で示す. 第 4 節で一般のホールド多項式次数に対応した行列近似公式を導出した後, 第 5 節で数値例を用いた近似誤差の漸近特性の確認と高次ホールド近似による計算効率の改善効果の検討をおこなう. 最後に, 第 6 節で本論文をまとめる.

また本章のみにおいて, 表記の煩雑さを避けるため  $\mathcal{K}_p^q := C^p([0, h]; \mathbb{R}^q)$  とする.

### 3.1 問題設定

ここでは, 以下のむだ時間系について考える.

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Ax(t) + Gx(t-h), \quad h > 0 \quad (3.1)$$

ただし,  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $A, G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  である. また, 初期値は

$$x(0) = x_0, \quad x(\theta-h) =: \phi(\theta), \quad \theta \in [0, h)$$

であり,  $\phi \in \mathcal{K}_n^{n_x}$  とする. ここで,  $B \in \mathbb{R}^{n_x \times m_u}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m_u \times n_x}$  を用いて行列  $G$  を  $G = BC$  のように分解できるとする. この分解を用いると, 式 (3.1) を状態  $x$  と入出力  $u, y \in \mathbb{R}^{m_u}$  をもつ有限次元線形時不変系

$$\Sigma_f : \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y = Cx(t)$$

と純粋な時間遅れ

$$\Sigma_d : u(t) = y(t-h)$$

のフィードバック結合 (Fig. 3.1) によって表現できる. 具体的には, 各サブシステムの初期値を  $x(0) = x_0$ ,  $u(\theta) = C\phi(\theta) \in \mathcal{K}_n^{m_u}$ ,  $\theta \in [0, h)$  とすることにより,  $\Sigma$  の状態遷移が得られる. 時間関数  $u(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$  に対して,  $\hat{u}_\nu = u(\nu h + \theta)$ ,  $\theta \in [0, h)$  とし,  $u(\cdot)$  を

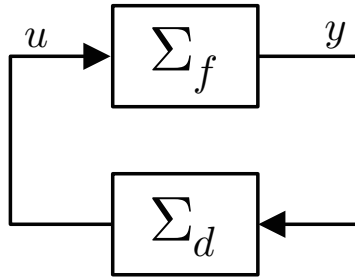


Fig. 3.1: むだ時間系  $\Sigma$

関数の列  $\{\hat{u}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$  で表現することにする．空間  $\mathcal{K}_{n+1}^{m_u}$  から  $\mathcal{K}_n^{m_u}$  への埋め込み作用素を  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{Z}_n := \mathbb{R}^{n_x} \oplus \mathcal{K}_n^{m_u}$  とし,  $\mathcal{Z}_n$  上のモノドロミ作用素  $\mathcal{F}$  を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \mathcal{I}(\mathcal{J})\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{Z}_n \rightarrow \mathcal{Z}_n \\ \tilde{\mathcal{F}} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{F}}_{11} & \tilde{\mathcal{F}}_{12} \\ \tilde{\mathcal{F}}_{21} & \tilde{\mathcal{F}}_{22} \end{bmatrix} : \mathcal{Z}_n \rightarrow \mathcal{Z}_{n+1} \\ \tilde{\mathcal{F}}_{11} &= e^{Ah} =: A_d, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{12}\hat{u} = \int_0^h e^{A(h-\tau)} B\hat{u}(\tau) d\tau, \tag{3.3}$$

$$(\tilde{\mathcal{F}}_{21}x)(\theta) = Ce^{A\theta}x, \tag{3.4}$$

$$(\tilde{\mathcal{F}}_{22}\hat{u})(\theta) = \int_0^\theta Ce^{A(\theta-\tau)} B\hat{u}(\tau) d\tau \tag{3.5}$$

このとき,  $x_\nu := x(\nu h)$  とすると 上記フィードバック結合による状態遷移は

$$\begin{bmatrix} x_{\nu+1} \\ \hat{u}_{\nu+1} \end{bmatrix} = \mathcal{F} \begin{bmatrix} x_\nu \\ \hat{u}_\nu \end{bmatrix}$$

で表現され, むだ時間系  $\Sigma$  の安定性は,  $\mathcal{F}$  のスペクトル半径によって特徴づけられる．以下では, 一般化サンプリング作用素と一般化ホールド作用素を用いて  $\mathcal{F}$  の出力の関数部分を多項式関数で近似し, そのスペクトルを行列の固有値計算から数値的に求める方法について考える．

### 3.2 一般化サンプリング/ホールド作用素

本節では高次ホールド近似のためのサンプリング作用素, ホールド作用素を導入する．連続関数  $\bar{y} \in \mathcal{K}_0^{m_u}$  と  $N \in \mathbb{N}$  が与えられたとき,  $h' := h/N$ ,  $\theta_k = kh'$ ,  $k = 0, \dots, N$  とし, サンプリング作用素  $\mathcal{K}_0^{m_u} \rightarrow \mathbb{R}^{m_u(N+1)}$  を

$$\mathcal{S}\bar{y}(\cdot) := \begin{bmatrix} \bar{y}(\theta_0) \\ \vdots \\ \bar{y}(\theta_{N-1}) \\ \bar{y}(\theta_N) \end{bmatrix}$$

と定める．微分作用素を  $\mathcal{D}$  で表すとき, 一般化サンプリング作用素  $\mathcal{S}_g : \mathcal{K}_n^{m_u} \rightarrow \mathbb{R}^{m_u(n+1)(N+1)}$  は  $\mathcal{D}, \mathcal{S}$  を用いて

$$\mathcal{S}_g = \begin{bmatrix} \mathcal{S}^T & (\mathcal{S}\mathcal{D})^T & \dots & (\mathcal{S}\mathcal{D}^n)^T \end{bmatrix}^T \tag{3.6}$$

と表わされる．つまり， $\mathcal{S}_g$  は各時刻  $\theta_k$ ,  $k = 0, \dots, N$  毎に関数値と  $n$  次までの導関数値をサンプルする．

次にこれと対をなす次の操作を考える．区間  $[0, h]$  を  $N$  等分した離散時間点上で  $n$  階導関数までの値が指定されているとき，これを満たす区分的な  $2n + 1$  次多項式を構成する．時刻  $\theta_k$  における  $i$  階導関数の値を  $d_i(k)$  として，データベクトルを以下のように定める．

$$\check{d} = \begin{bmatrix} \check{d}_0 \\ \vdots \\ \check{d}_n \end{bmatrix}, \quad \check{d}_i = \begin{bmatrix} d_i(0) \\ \vdots \\ d_i(N) \end{bmatrix}.$$

このデータベクトルから，区間  $[\theta_k, \theta_{k+1}]$  両端の条件を満たす補間関数  $\tilde{u}_k(\cdot)$  を構成し<sup>\*1</sup> これらをつなぎあわせて，区間  $[0, h]$  の区分的多項式  $\tilde{u}(\cdot)$  を与える<sup>\*2</sup>．一般化ホールド作用素  $\mathcal{H}_g: \mathbb{R}^{m_u(n+1)(N+1)} \rightarrow \mathcal{K}_n^{m_u}$  はこの対応  $\mathcal{H}_g: \check{d} \mapsto \tilde{u}(\cdot)$  を与えるものとして定める．関数  $\tilde{u}_k$  の具体的な構成法を以下で述べる．原理的には，第  $k$  区間両端での関数値および高階導関数値に関する  $2n + 2$  個の条件

$$\tilde{u}_k^{(i)}(\theta_k) = d_i(k), \quad \tilde{u}_k^{(i)}(\theta_{k+1}) = d_i(k+1), \quad (3.7)$$

( $i = 0, \dots, n$ ) より， $2n + 1$  次多項式  $\tilde{u}_k(\theta)$  の係数が一意に定まるが<sup>3</sup>，その数値計算における誤差を低減するためには，区間  $[\theta_k, \theta_{k+1}]$  を  $[0, 1]$  に写像して考えた方がよいことが分かっている [50]．すなわち区間上下端の  $i$  階導関数の値をそれぞれ  $\bar{v}(i)$ ,  $\underline{v}(i)$  とするとき，補間条件

$$q^{(i)}(0) = (h')^i \underline{v}(i), \quad q^{(i)}(1) = (h')^i \bar{v}(i),$$

( $i = 0, \dots, n$ ) を満足する多項式

$$q(\xi) = \sum_{j=0}^{2n+1} a_j \xi^j, \quad \xi \in [0, 1] \quad (3.8)$$

を求め，区間毎に求まった  $q(\cdot)$  から

$$\tilde{u}_k(\theta) = q((\theta - \theta_k)/h')$$

<sup>\*1</sup> 区間  $[\theta_k, \theta_{k+1}]$  における補間多項式  $u_k(\theta)$  を時刻  $k$  で構成する操作は未来情報  $d_i(k+1)$ , ( $i = 0, \dots, n$ ) を用いているため因果的ではない．しかし，ここでは実時間処理を考えているわけではないのでこのような非因果性は許容できる．

<sup>\*2</sup> 区分的に生成されるが，隣接区間では端点の補間条件を共有するため，全体として  $\tilde{u} \in \mathcal{K}_n^{m_u}$  となる．



を与える. 多項式  $q(\cdot)$  は区間毎に異なるが, 簡単のため, 以下の係数の決定方法の説明にあたっては, これを明示的に表記しない. 多項式  $q(\cdot)$  の  $i$  階導関数は

$$q^{(i)}(\xi) = \sum_{j=i}^{2n+1} a_j \frac{j!}{(j-i)!} \xi^{j-i}$$

であるから, 補間条件は

$$(h')^i \underline{v}(i) = ({}_i P_i) a_i, \quad (h')^i \bar{v}(i) = \sum_{j=i}^{2n+1} ({}_j P_i) a_j, \quad (3.9)$$

( $i = 0, \dots, n$ ) と表せる. いま

$$\begin{aligned} a &= \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{2n+1} \end{bmatrix}, \quad \check{v}(i) = \begin{bmatrix} \underline{v}(i) \\ \bar{v}(i) \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \check{v}(0) \\ \vdots \\ \check{v}(n) \end{bmatrix}, \\ D &= \text{diag}[1, h', \dots, (h')^n] \otimes I_{2m_u}, \\ W_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times i} & {}_i P_i & 0 & \cdots & 0 \\ & {}_i P_i & {}_{i+1} P_i & \cdots & {}_{2n+1} P_i \end{bmatrix} \\ V &= \begin{bmatrix} W_0 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix} \otimes I_{m_u}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

とすると, 式 (3.9) は線形方程式

$$Dv = Va \quad (3.11)$$

にまとめられる. 行列  $V$  は Confluent Vandermonde 行列 [51] の行を入れ替えたものになっており, この行列は一般に補間点が相異なるとき正則であることが知られている. いま関数  $q(\cdot)$  においては補間点は 0 と 1 なので,  $V^{-1}$  が存在する. したがって式 (3.11) より, 係数  $\{a_j\}$  は

$$a = V^{-1} Dv \quad (3.12)$$

によって与えられる.

### 3.3 近似手続きの数学的妥当性

前節で導入した  $\mathcal{S}_g, \mathcal{H}_g$  を用いて, モノドロミ作用素  $\mathcal{F}$  の出力を高速サンプル/ホールドすると次の作用素が得られる.

$$\mathcal{F}_g = \mathcal{I}(\mathcal{H}_g) \mathcal{I}(\mathcal{S}_g) \mathcal{F} \quad (3.13)$$

以下では、これを  $\mathcal{F}$  の近似とみなす。まず、この手続きの数学的妥当性を示す。先行研究では、

- $\mathbb{R}^{n_x} \oplus L_2([0, h]; \mathbb{R}^{m_u})$  および  $\mathbb{R}^{n_x} \oplus C^0([0, h]; \mathbb{R}^{m_u})$  上で定義された  $\mathcal{F}$  がコンパクトである。
- 高速サンプル/ホールド近似による  $\mathcal{F}$  への摂動が、 $N \rightarrow \infty$  のとき、作用素ノルムの意味で 0 に収束する。

ことを示し、摂動に対するスペクトルの連続性から近似の妥当性を論じている [28, 30]。ここでは、上記の議論を  $C^n[0, h)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  について拡張する。

### 3.3.1 モノドロミ作用素のコンパクト性

作用素  $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} \\ \mathcal{F}_{21} & \mathcal{F}_{22} \end{bmatrix} : \mathcal{Z}_n \rightarrow \mathcal{Z}_n$  のコンパクト性を示す。ただし、 $\mathcal{F}_{11} := \hat{\mathcal{F}}_{11}$ ,  $\mathcal{F}_{12} := \hat{\mathcal{F}}_{12}$ ,  $\mathcal{F}_{21} := \mathcal{J}\hat{\mathcal{F}}_{21}$ ,  $\mathcal{F}_{22} := \mathcal{J}\hat{\mathcal{F}}_{22}$  である。

証明の流れを述べる。まず  $m_u = 1$  として、モノドロミ作用素の (2,2) 要素

$$\mathcal{F}_{22}u = \int_0^\theta Ce^{A(\theta-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (3.14)$$

のコンパクト性を証明する。文献 [43, 44] では、定理 2.7 に基づき、 $C^0([0, h]; \mathbb{R}^1)$  上の  $\mathcal{F}_{22}$  の像が一様有界かつ一様同程度連続であることを示して、 $\mathcal{F}_{22}$  のコンパクト性を証明している。これを拡張して、より滑らかな空間  $C^n([0, h]; \mathbb{R}^1)$  上でのコンパクト性を示す。いま、(2,2) 要素は  $C^n([0, h]; \mathbb{R}^1)$  上のボルテラ型積分作用素であるから、区間が  $[0, h]$  から  $[0, h)$  に変更された場合においても  $\mathcal{F}_{22}$  がコンパクトであることを示す。ついでコンパクト作用素を成分に持つ作用素がコンパクトであることを示し、最終的にモノドロミ作用素のコンパクト性を証明する。

ここで、 $\ell \leq k$  なる  $\ell \in \mathbb{N}_0$  に対して関数族  $\Phi_k^\ell$  を次のように定義する。

$$U_k = \{u \in C^k[0, h] \mid \|u\|_{C^k[0, h]} \leq 1\}, \quad (3.15)$$

$$\Phi_k^\ell = \{\phi^{(\ell)} \mid \phi = \mathcal{F}_{22}u, \forall u \in U_k\}. \quad (3.16)$$

以下では  $\Phi_k^\ell$ ,  $\ell = k, k-1, \dots, 0$  の  $C^{k-\ell}[0, h]$  における相対コンパクト性を帰納的に示し、最終的に  $C^k[0, h]$  上の  $\mathcal{F}_{22}$  のコンパクトを示す。

**補題 3.1.** 任意の  $k \in \mathbb{N}_0$  に対して、 $\Phi_k^k$  は  $C^0[0, h]$  において相対コンパクトである。

証明. まず式 (3.14) において,  $C = I$  とした場合について示す. 前述のとおり,  $k = 0$  のとき題意は成り立つ. よって  $\Phi_0^0$  は, 一様有界かつ一様同程度連続である. 次に  $k = 1$  の場合を考える. 定義 (2.1) より  $U_1 \subset U_0$ , したがって  $\Phi_1^0 \subset \Phi_0^0$  であるから  $\Phi_1^0$  も一様有界かつ一様同程度連続である. したがって任意の  $\epsilon_1 > 0$  が与えられたとき, ある  $\delta_1$  が存在して,  $|t_1 - t_2| < \delta_1$  なる  $\forall t_1, t_2 \in [0, h]$ ,  $\forall \phi \in \Phi_1^0$  に対して  $|\phi(t_1) - \phi(t_2)| < \epsilon_1$ . ここで,  $t_1, t_2$  を両端とする閉区間を  $\tilde{I} \subseteq [0, h]$  とおく. いま  $u \in U_1$  について

$$u(t_2) = u(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u^{(1)}(\zeta) d\zeta$$

が成り立つから,  $|u(t_2) - u(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |u^{(1)}(\zeta)| d\zeta$  を得る. 再び  $u \in U_1$  より,  $|u^{(1)}(\zeta)| \leq 1$ ,  $\forall \zeta \in \tilde{I}$  であるから  $|u(t_1) - u(t_2)| \leq |t_1 - t_2|$ ,  $\forall t_1, t_2 \in [0, h]$  となる. よって, 任意の  $\epsilon_2 > 0$  に対し,  $\delta_2 = \epsilon_2$  とすると,  $|t_1 - t_2| < \delta_2$  なる任意の  $t_1, t_2 \in [0, h]$  に対して  $|u(t_1) - u(t_2)| < \epsilon_2$  となることが保証される.

いま,  $\phi \in \Phi_1^0$  は積分 (3.14) によって与えられているので,  $C = I$  に注意すると, その導関数は

$$\phi^{(1)}(t) = A\phi(t) + Bu(t)$$

で与えられる. 以下ではこの表現をもとに,  $\{\phi^{(1)}\}$  の一様有界性, 一様同程度連続性をいう.

いま  $\Phi_1^0$  は一様有界, すなわち  $|\phi(t)| \leq K_1 \forall \phi \in \Phi_1^0, \forall t \in [0, h]$  となる  $K_1$  が存在する. また  $u \in U_1$  より,  $|u(t)| \leq 1, \forall t \in [0, h]$ . したがって  $|\phi^{(1)}(t)| \leq \|A\|_i K_1 + \|B\|_i, \forall \phi^{(1)} \in \Phi_1^1, \forall t \in [0, h]$ . よって  $\Phi_1^1$  は一様有界. 一方, 任意の  $\epsilon_3 > 0$  に対して,  $\epsilon_1 = \epsilon_3/(2\|A\|_i)$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_3/(2\|B\|_i)$ ,  $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$  とすれば,  $|t_1 - t_2| < \delta_3$  なる  $\forall t_1, t_2 \in [0, h]$ ,  $\forall \phi^{(1)} \in \Phi_1^1$  に対して

$$\begin{aligned} & |\phi^{(1)}(t_1) - \phi^{(1)}(t_2)| < \\ & |A(\phi(t_1) - \phi(t_2))| + |B(u(t_1) - u(t_2))| < \epsilon_3. \end{aligned}$$

よって  $\Phi_1^1$  は一様同程度連続である.

また  $k \geq 2$  のとき,  $U_k \subset U_{k-1}$  より  $\Phi_k^{k-1} \subset \Phi_{k-1}^{k-1}$  であり,  $\phi^{(k)}(t) = A\phi^{(k-1)}(t) + Bu^{(k-1)}(t)$  となるから, 全く同様の議論から順次  $\Phi_k^k$  が一様有界かつ一様同程度連続であることがいえる.

さてここで  $C = I$  のときの関数族の要素を  $\bar{\phi}$  と置き直せば, 一般の  $C$  行列に対する要素  $\phi$  は  $\phi = C\bar{\phi}$  と書ける. このとき  $|\phi^{(k)}| = |C\bar{\phi}^{(k)}| \leq \|C\|_i |\bar{\phi}^{(k)}|$ ,

$$|\phi^{(k)}(t_1) - \phi^{(k)}(t_2)| \leq \|C\|_i |\bar{\phi}^{(k)}(t_1) - \bar{\phi}^{(k)}(t_2)|$$

が成り立つので、一様有界性、一様同程度連続性は不変。したがって一般の  $C$  行列の場合についても、 $\Phi_k^k$  は一様有界かつ一様同程度連続である。よって Arzelà の定理から題意が成り立つ。  $\square$

**補題 3.2.** いま  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $\ell + 1 \leq k$  とする。関数族  $\Phi_k^{\ell+1}$  が  $C^{k-\ell-1}[0, h]$  において相対コンパクトであるならば、 $\Phi_k^\ell$  も  $C^{k-\ell}[0, h]$  において相対コンパクトである。

証明. いま相対コンパクト性と全有界性は同義であるので、以下では関数族の全有界性、すなわち有限個の点からなる  $\epsilon$ -網の存在性に基づいた証明を与える。

任意の  $\epsilon > 0$  に対して、 $\epsilon' = \epsilon / \{2(h+1)\}$  とする。仮定より、 $\Phi_k^{\ell+1}$  は  $C^{k-\ell-1}[0, h]$  で全有界なので、この空間内の有限個の点からなる  $\Phi_k^{\ell+1}$  の  $\epsilon'$ -網が存在する。これを  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_s\}$  とする。

定義 (2.1) より  $i > j$  のとき、 $U_i \subset U_j$ 。仮定から  $k > \ell$ 、よって  $U_k \subset U_\ell$  なので、 $\Phi_k^\ell \subset \Phi_\ell^\ell$ 。よって補題 3.1 から  $\Phi_k^\ell$  も一様有界、すなわち

$$\sup_{t \in [0, h]} |\phi^{(\ell)}(t)| \leq K, \quad \forall \phi^{(\ell)} \in \Phi_k^\ell, \quad (3.17)$$

なる  $K > 0$  が存在する。このとき、 $r := \lceil K/\epsilon \rceil$ ,

$$c_i = \epsilon i, \quad \xi_{ij} = c_i + \int_0^t \psi_j(\tau) d\tau, \quad (3.18)$$

$i = -r, -r+1, \dots, r$ ,  $j = 1, \dots, s$  とする。いま

$$\psi_j \in \Phi_k^{\ell+1} \subset C^m[0, h], \quad m = k - \ell - 1,$$

より、 $\xi_{ij} \in C^{m+1}[0, h]$  である。任意の  $\phi^{(\ell)} \in \Phi_k^\ell$  に対して式 (3.17), (3.18), および  $\epsilon'$ -網の性質から

$$|\phi^{(\ell)}(0) - c_p| \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad (3.19)$$

$$\left\| \phi^{(\ell+1)} - \psi_q \right\|_{C^m[0, h]} \leq \epsilon', \quad (3.20)$$

を満たす添字  $p, q$  が存在する。定義 (2.1) から

$$|\phi^{(\ell+1)}(t) - \psi_q(t)| \leq \epsilon', \quad \forall t \in [0, h], \quad (3.21)$$

も成り立つ. このとき, 式 (3.19), (3.21) より

$$\begin{aligned}
& \left| \phi^{(\ell)}(t) - \xi_{pq}(t) \right| \\
&= \left| \phi^{(\ell)}(0) + \int_0^t \phi^{(\ell+1)}(\tau) d\tau - c_p - \int_0^t \psi_q(\tau) d\tau \right| \\
&\leq \left| \phi^{(\ell)}(0) - c_p \right| + \int_0^t \left| \phi^{(\ell+1)}(\tau) - \psi_q(\tau) \right| d\tau \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \epsilon' h, \quad \forall t \in [0, h],
\end{aligned} \tag{3.22}$$

が成り立ち,  $\phi^{(\ell)}$ ,  $\xi_{pq}$  の導関数が  $\phi^{(\ell+1)}$ ,  $\psi_q$  であることから

$$\begin{aligned}
& \left\| \phi^{(\ell)} - \xi_{pq} \right\|_{C^{m+1}[0, h]} \\
&= \sup_{t \in [0, h]} \left| \phi^{(\ell)}(t) - \xi_{pq}(t) \right| + \left\| \phi^{(\ell+1)} - \psi_q \right\|_{C^m[0, h]},
\end{aligned}$$

なので式 (3.20), (3.22) より

$$\left\| \phi^{(\ell)} - \xi_{pq} \right\|_{C^{m+1}[0, h]} \leq \frac{\epsilon}{2} + \epsilon'(1 + h) = \epsilon.$$

よって  $\{\xi_{ij}\}$  は  $C^{k-\ell}[0, h]$  の有限個の点からなる  $\Phi_k^\ell$  の  $\epsilon$ -網である. よって題意がしたがう.  $\square$

**定理 3.3.** 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して,  $\mathcal{F}_{22} : C^n[0, h] \rightarrow C^n[0, h]$  はコンパクトである.

証明. 補題 3.1 から  $\Phi_n^n$  は  $C^0[0, h]$  において相対コンパクトである. 補題 3.2 を繰り返し適用することで,  $\Phi_n^0$  は  $C^n[0, h]$  において相対コンパクトであることがいえる. ゆえに  $\mathcal{F}_{22}$  は  $C^n[0, h]$  上でコンパクトである.  $\square$

**定理 3.4.** 作用素  $\mathcal{F}_{22}$  が  $C^n[0, h]$  上でコンパクトであれば,  $C^n[0, h]$  上においてもコンパクトである.

証明. いま  $C^n[0, h)$  上の  $\mathcal{F}_{22}$  を  $\mathcal{F}'_{22}$  で表す. 関数  $f \in C^n[0, h)$  に対して左極限  $\lim_{t \rightarrow h-0} f^{(i)}(t)$ ,  $i = 0, \dots, n$  を付け加える作用素  $\mathcal{P} : C^n[0, h) \rightarrow C^n[0, h]$  を考える. このとき式 (3.27), 式 (2.1) のノルムの等長性より,  $\mathcal{P}$  は有界作用素である. また,  $C^n[0, h)$  の定義より  $\mathcal{P}$  は全単射であり, 逆作用素  $\mathcal{P}^{-1} : C^n[0, h] \rightarrow C^n[0, h)$  が存在するが, 同様にノルムの等長性が成り立ち,  $\mathcal{P}^{-1}$  も有界. コンパクト作用素と有界作用素の積はコンパクト作用素となる [44] ため,  $\mathcal{F}'_{22} = \mathcal{P}\mathcal{F}_{22}\mathcal{P}^{-1}$  もコンパクトである.  $\square$

補題 3.5.  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{X}', \mathcal{Y}'$  をバナッハ空間とし, 作用素  $\mathcal{G}$  を以下のように定義する.

$$\mathcal{G} := \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} : \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}' \oplus \mathcal{Y}' \quad (3.23)$$

このとき, 各要素  $g_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$  がコンパクトならば作用素  $\mathcal{G}$  もコンパクトである.

証明. まず空間  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{X}'$  について

$$\mathcal{G}_1 := \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \end{bmatrix} : \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}' \quad (3.24)$$

なる作用素を考える. いま,  $s_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} \in \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$  として  $\{s_k\}$  を任意の有界列とする. このとき,  $\{x_k\}, \{y_k\}$  も有界列である. 仮定より,  $g_{1i}$  はコンパクトなので,  $\{g_{11}x_{k'}\}$  が収束列となる  $\{x_k\}$  の部分列  $\{x_{k'}\}$  が存在する. 同様に  $\{y_{k'}\}$  の有界性より  $\{g_{12}y_{k''}\}$  が収束列となる  $\{y_k\}$  の部分列  $\{y_{k''}\}$  が存在する. 収束する部分列の任意の部分列は収束するので  $\{g_{11}x_{k''}\}$  も収束列となる. よって  $\left\{ \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \end{bmatrix} s_{k''} \right\}$  は収束列であるため,  $\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \end{bmatrix}$  はコンパクトである.

つぎに空間  $\mathcal{X}, \mathcal{X}', \mathcal{Y}'$  について

$$\mathcal{G}_2 := \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{bmatrix} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}' \oplus \mathcal{Y}' \quad (3.25)$$

なる作用素を考える. ここで  $x_k \in \mathcal{X}$  を任意の有界列とする.  $g_{11}$  のコンパクト性より,  $\{g_{11}x_{k'}\}$  が収束列となる  $\{x_k\}$  の部分列  $\{x_{k'}\}$  が存在する. 部分列  $\{x_{k'}\}$  も有界列であるため,  $g_{21}$  のコンパクト性より  $\{g_{21}x_{k''}\}$  が収束列となる  $\{x_{k'}\}$  の部分列  $\{x_{k''}\}$  が存在する. したがって  $\{g_{11}x_{k''}\}$  も収束列となることから  $\left\{ \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{bmatrix} x_{k''} \right\}$  は収束列となる.

よって  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  の議論を合わせると

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} : \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}' \oplus \mathcal{Y}' \quad (3.26)$$

はコンパクトである. □

補題 3.5 は, 入力や出力の数が増えても同様に考えることができるため,  $C^n([0, h]; \mathbb{R}^{m_u})$  上の  $\mathcal{F}_{22}$  はコンパクトである. また, この補題を踏まえて次の結果を得る.

定理 3.6. 作用素  $\mathcal{F} : \mathcal{Z}_n \rightarrow \mathcal{Z}_n$  はコンパクトである.

証明. 式 (3.2), (3.3) より作用素  $[\mathcal{F}_{11}, \mathcal{F}_{12}]$  は値域が有限次元空間であるためコンパクトである. また, 作用素  $\tilde{\mathcal{F}}_{21}$  は有限ランク作用素であるためコンパクトであり,  $\tilde{\mathcal{F}}_{22}$  は定理 3.4, 補題 3.5 よりコンパクトである. したがって補題 3.5 より  $\mathcal{F}$  はコンパクトである.  $\square$

### 3.3.2 摂動の収束性

定理 3.7. 区間分割数を  $N \rightarrow \infty$  としたとき, 以下の摂動が作用素ノルムの意味で零に収束する.

$$\Delta = (\mathcal{I}(\mathcal{H}_g)\mathcal{I}(\mathcal{S}_g) - \mathcal{I}_{\mathcal{Z}_n})\mathcal{F} = \mathcal{F}_g - \mathcal{F}$$

証明. 空間  $\mathcal{Z}_n$  に対して次のようにノルムを定める.

$$\begin{aligned} \|z\|_{\mathcal{Z}_n} &:= \|x\| + \|u\|_{\mathcal{K}_n^{m_u}}, \\ \|u\|_{\mathcal{K}_n^{m_u}} &= \sum_{l=1}^{m_u} \sum_{i=0}^n \sup_{\theta \in [0, h)} \left| u_l^{(i)}(\theta) \right|. \end{aligned} \quad (3.27)$$

また,  $\mathcal{U}_n = \{z \mid z \in \mathcal{Z}_n, \|z\|_{\mathcal{Z}_n} \leq 1\}$  としたとき

$$\Psi = \left\{ f = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \mathcal{F}z \mid z \in \mathcal{U}_n \right\} \quad (3.28)$$

とする. 以下では簡単のために  $m_u = 1$  とするが,  $m_u > 1$  の場合についても同様に示せる. 関数  $f \in \Psi$  を  $\mathcal{S}_g, \mathcal{H}_g$  を用いて近似すると,  $\hat{f}(\cdot) = \mathcal{H}_g \mathcal{S}_g f(\cdot)$  となる. いま

$$\|\Delta\| = \sup_{z \neq 0} \frac{\|\Delta z\|_{\mathcal{Z}_n}}{\|z\|_{\mathcal{Z}_n}}$$

であるから,  $N \rightarrow \infty$  のとき  $\|\Delta\| \rightarrow 0$  となることをいうには,  $\forall z \in \mathcal{U}_n$  に対して  $\|\Delta z\|_{\mathcal{Z}_n} \rightarrow 0$  となること, すなわち任意の  $f \in \Psi$  に対して一様に

$$\left\| \hat{f}(\theta) - f(\theta) \right\|_{\mathcal{K}_n} \rightarrow 0 \quad (3.29)$$

となることを示せばよい. 区間  $\hat{I}_k := [\theta_k, \theta_{k+1})$  における誤差を式 (3.27) に即して

$$e(k) := \sum_{i=0}^n \sup_{\theta \in \hat{I}_k} \left| \hat{f}^{(i)}(\theta) - f^{(i)}(\theta) \right|, \quad (3.30)$$

と定めるとき, 式 (3.29) の左辺は  $\max_k e(k)$  である. いま  $2n+1$  次多項式  $\hat{f}(\theta)$  を

$$\hat{f}(\theta) = \sum_{j=0}^{2n+1} \frac{1}{j!} \tilde{a}_j (\theta - \theta_k)^j$$

と表現するとき, その構成から明らかに, 最初の  $n+1$  項の係数  $\tilde{a}_i$  は  $f^{(i)}(\theta_k)$  と一致している. 一方,  $\hat{f}(\theta)$  の  $i$  階導関数は

$$\hat{f}^{(i)}(\theta) = \sum_{j=i}^{2n+1} \frac{1}{(j-i)!} \tilde{a}_j (\theta - \theta_k)^{j-i} \quad (3.31)$$

となる. 低次のべきから数えて, 最初の  $n+1-i$  項を  $S_1(\theta)$ , 残りを  $S_2(\theta)$  とおく. ここで  $f^{(i)}(\theta)$  の  $\theta_k$  におけるテイラー展開を考えると, 先の性質から先頭の  $n+1-i$  項は  $S_1(\theta)$  と一致する. ここで  $g = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{F}}_{21} & \tilde{\mathcal{F}}_{22} \end{bmatrix} z$  を導入しよう<sup>\*3</sup>. いま  $f = \mathcal{J}g$  であるから  $f$  と  $g$  は同一であるが,  $g \in C^{n+1}[0, h)$  である. テイラーの定理 [53] より各  $\theta \in \hat{I}_k$ ,  $i = 0, \dots, n$  に対して,

$$\begin{aligned} g^{(i)}(\theta) &= \sum_{j=i}^n \frac{g^{(j)}(\theta_k)}{(j-i)!} (\theta - \theta_k)^{j-i} \\ &\quad + \frac{g^{(n+1)}(c)}{(n-i+1)!} (\theta - \theta_k)^{n-i+1}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

となる  $c \in (\theta_k, \theta)$  が存在するので, この  $c$  を  $c(\theta)$  と書き, 右辺第 2 項である剰余項を  $\tilde{R}(\theta)$  で表す. いま  $f, g$  の同一性から  $f^{(i)}(\cdot) = g^{(i)}(\cdot)$ , ( $i = 0, \dots, n$ ) なので, 式 (3.32) の左辺は  $f^{(i)}(\theta)$ , 右辺第一項は  $S_1(\theta)$  に等しい. これを用いると,  $f$  の  $i$  階導関数における近似誤差を

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}^{(i)}(\theta) - f^{(i)}(\theta) \right| &\leq \left| \hat{f}^{(i)}(\theta) - S_1(\theta) \right| + \left| f^{(i)}(\theta) - S_1(\theta) \right| \\ &= |S_2(\theta)| + \left| \tilde{R}(\theta) \right| \end{aligned} \quad (3.33)$$

と見積もることができる. さて  $g$  は

$$g(\theta) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{F}}_{21} & \tilde{\mathcal{F}}_{22} \end{bmatrix} z = Ce^{A\theta}x + \tilde{\mathcal{F}}_{22}u \quad (3.34)$$

( $\|z\|_{\mathcal{Z}_n} = \|x\| + \|u\|_{\mathcal{K}_n} \leq 1$ ) と表されるのであった. 右辺の第 1, 2 項それぞれ  $g_1, g_2$  としよう. 補題 3.1 の証明において,  $\mathcal{F}_{22} = \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_{22}$  を  $\tilde{\mathcal{F}}_{22}$  に変更しても, 像が  $n+1$  回微分可能となる以外は, 議論に影響がなく, これより関数族  $\{g_2^{(i)} \mid \|u\|_{\mathcal{K}_n} \leq 1\}$ , ( $i = 0, \dots, n+1$ ) の一様有界性が順次いえる. 一方,  $g_1^{(n+1)} = CA^{n+1}e^{A\theta}x$  なので, 関数族  $\{g_1^{(n+1)} \mid \|x\| \leq 1\}$  の一様有界性も明らか. ゆえに,  $\{g^{(n+1)} \mid \|z\|_{\mathcal{Z}_n} \leq 1\}$  の一様有界性がしたがう. すなわち  $\forall z \in \mathcal{U}_n$  に対して式 (3.34) より生成される任意の  $g$  について

$$\left| g^{(n+1)}(\theta) \right| \leq K_1, \quad \forall \theta \in [0, h), \quad (3.35)$$

<sup>\*3</sup> 実質的には  $f$  は  $n+1$  回微分可能だが, 形式上  $f \in C^n[0, h)$  としており,  $f^{(n+1)}(\cdot)$  という表記は望ましくない. そこで (若干迂遠ではあるが),  $g$  の導入によりこれを回避している.



を満たす定数  $K_1 > 0$  が存在する.

これにより剰余項の大きさの評価が可能なので, 次に  $|S_2(\theta)|$  の評価を考える. ここで  $a_j = (h')^j \tilde{a}_j / j!$  とすれば

$$\hat{f}(\theta) = \sum_{j=0}^{2n+1} a_j \left( \frac{\theta - \theta_k}{h'} \right)^j \quad (3.36)$$

であり, 同様に 式 (3.31) から

$$S_1(\theta) = \sum_{j=i}^n \frac{{}_jP_i a_j}{(h')^i} \left( \frac{\theta - \theta_k}{h'} \right)^{j-i}, \quad (3.37)$$

$$S_2(\theta) = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \frac{{}_jP_i a_j}{(h')^i} \left( \frac{\theta - \theta_k}{h'} \right)^{j-i} \quad (3.38)$$

である. 係数全体  $\{a_j\}$  は線形方程式 (3.11) に従うが,  $|S_2(\theta)|$  の評価には, その後半部  $\{a_j | j = n+1, \dots, 2n+1\} =: \bar{a}$  の各要素の大きさの見積もりが必要である. 一方, 前半部  $a_j$ ,  $j = i, \dots, n$  は  $\hat{f}^{(i)}(\theta)$  のテイラー展開係数と関係づけられるので, その誤差評価と式 (3.11) を利用して,  $\bar{a}$  を特徴づけよう. 区間上端での補間条件  $f^{(i)}(\theta_{k+1}) = \hat{f}^{(i)}(\theta_{k+1})$  より

$$(h')^i f^{(i)}(\theta_{k+1}) = \sum_{j=i}^{2n+1} {}_jP_i a_j \quad (3.39)$$

を得る. いま式 (3.37) で  $\theta = \theta_{k+1}$  とすれば

$$(h')^i S_1(\theta_{k+1}) = \sum_{j=i}^n {}_jP_i a_j \quad (3.40)$$

である. また式 (3.32) は  $\theta = \theta_{k+1}$  においても成立し

$$f^{(i)}(\theta_{k+1}) = S_1(\theta_{k+1}) + \frac{g^{(n+1)}(\tilde{c}_i)}{(n-i+1)} (h')^{n-i+1} \quad (3.41)$$

となる  $\tilde{c}_i \in (\theta_k, \theta_{k+1})$  が存在する. 式 (3.39)-(3.41) から

$$\begin{aligned} \sum_{j=n+1}^{2n+1} {}_jP_i a_j &= (h')^i \left( f^{(i)}(\theta_{k+1}) - S_1(\theta_{k+1}) \right) \\ &= \frac{1}{(n-i+1)} g^{(n+1)}(\tilde{c}_i) (h')^{n+1}, \end{aligned}$$

を得る. 各  $i$  に対する条件式をまとめると, 線形方程式

$$(h')^{n+1} \bar{w} = M \bar{a}, \quad (3.42)$$

$$\bar{w} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\tilde{c}_0) \\ \frac{1}{n!} g^{(n+1)}(\tilde{c}_1) \\ \vdots \\ g^{(n+1)}(\tilde{c}_n) \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{2n+1} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} {}_{n+1}P_0 & \cdots & {}_{2n+1}P_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}_{n+1}P_n & \cdots & {}_{2n+1}P_n \end{bmatrix}.$$

が得られる．ここで行列  $M$  は、式 (3.10) の行列  $V$  の行を並べ替えて、以下のようなブロック下三角行列  $\bar{V}$  に変形したときの  $(2, 2)$  ブロック要素になっている．

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} \bar{V}_{11} & 0_{n+1} \\ * & M \end{bmatrix}, \quad \bar{V}_{11} = \text{diag} [{}_0P_0, {}_1P_1, \dots, {}_nP_n].$$

いま  $V$  が正則であるから  $M$  も正則である．このとき、式 (3.35) より、式 (3.43) の  $\bar{w}$  の各要素の絶対値は  $K_1$  より小さいので、 $\|\bar{w}\| \leq K_1 \sqrt{n+1}$  である．また

$$K_2 = (K_1 \sqrt{n+1}) / \sigma_{\min}(M)$$

( $\sigma_{\min}(M)$  は  $M$  の最小特異値) とすると、式 (3.42) より

$$\begin{aligned} \|\bar{a}\| &= \|M^{-1} \bar{w}\| (h')^{n+1} \\ &\leq \|M^{-1}\|_i \|\bar{w}\| (h')^{n+1} \leq K_2 (h')^{n+1} \end{aligned}$$

となる．したがって、 $j = n+1, \dots, 2n+1$  に対して、 $|a_j| \leq \|\bar{a}\| \leq K_2 (h')^{n+1}$  となる．では  $S_2(\theta)$  の大きさを評価しよう．いま  $N > h$  ( $h' = h/N < 1$ ) と仮定すると、式 (3.38) で与えられている  $S_2(\theta)$  に対して、すべての  $\theta \in \hat{I}_k$  と 0 から  $n$  までの各  $i$  に対して

$$\begin{aligned} |S_2(\theta)| &\leq \sum_{j=n+1}^{2n+1} {}_jP_i |a_j| (h')^{-i} \\ &\leq \sum_{j=n+1}^{2n+1} {}_jP_i K_2 (h')^{n-i+1} \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし式 (3.38) において、 $((\theta - \theta_k)/h')^{j-i} < 1$ ,  $\forall \theta \in \hat{I}_k$ ,  $\forall j \geq n+1$ ,  $\forall i \leq n$  であることを用いた．さらに  $i \leq n$ ,  $j \geq n+1$  なので、 ${}_jP_i \leq {}_jP_n$  および  $(h')^{n-i+1} < h'$  である．したがって  $K_3 = \sum_{j=n+1}^{2n+1} ({}_jP_n) K_2$  とすれば、すべての  $i$  と  $\theta \in \hat{I}_k$  に対して

$$|S_2(\theta)| \leq K_3 h' \quad (3.44)$$

がいえ.

一方, 剰余項については, 先と同様に式 (3.35) から, 0 から  $n$  の各  $i$  とすべての  $\theta \in \hat{I}_k$  に対して

$$\left| \tilde{R}(\theta) \right| \leq \frac{K_1}{(n-i+1)!} (h')^{n-i+1}$$

であるので,  $i$  によらず

$$\left| \tilde{R}(\theta) \right| \leq K_1 h' \quad (3.45)$$

となる. つまり, 式 (3.33), (3.44), (3.45) より, すべての  $f \in \Psi$  と 0 から  $n$  までの  $i$ , すべての  $\theta \in \hat{I}_k$  に対して

$$\left| \hat{f}^{(i)}(\theta) - f^{(i)}(\theta) \right| \leq (K_1 + K_3) h'$$

である. ここで  $K := K_1 + K_3$  とすれば, 定義 (3.30) より  $e(k) \leq (n+1)Kh'$ . これまでの議論は  $k$  に依存しておらず, これはすべての 0 から  $N-1$  の  $k$  について成り立つ. したがって, ある  $\epsilon > 0$  が与えられたとき, 区間分割数  $N$  を  $\max(N_1, h)$ ,  $N_1 := \lceil h(n+1)K/\epsilon \rceil$  より大きくすれば仮定  $h' < 1$  は満たされ, かつ  $h' < h/N_1$  より,  $e(k) < \epsilon$ ,  $\forall k, \forall f \in \Psi$ . すなわち, 式 (3.30) を介して式 (3.29) が成り立つ.  $\square$

以上の結果から, ここで考えている近似手続きの妥当性を以下のように示すことができる. 定理 3.6 より,  $\mathcal{F}$  はコンパクトである. 定理 2.17 より原点を中心とする任意の半径  $\gamma > 0$  の円でスペクトルを分割するとき, 円外の固有値は  $\mathcal{F}$  の定義 2.18 の意味で有限固有値系をなす. また定理 3.7 より, 離散近似に伴う摂動  $\Delta$  は分割数  $N \rightarrow \infty$  としたとき, generalized sense で零に収束する. よって摂動  $\Delta$  に対して  $\mathcal{F}$  の有限固有値系は連続, つまり  $N$  を増加させると,  $\mathcal{F}_g$  の有限固有値系は  $\mathcal{F}$  のそれに漸近する (定理 2.13, 定理 2.19).

### 3.4 行列表現

前節の結果より, 区間の分割を十分細かくするとき,  $\mathcal{F}_g$  の非零の固有値は,  $\mathcal{F}$  のそれに漸近する. 一方, 作用素の順序変更をおこなっても非零のスペクトルの要素は不変であるから, ここでは  $\mathcal{F}_g$  に代えて,  $\mathcal{I}(\mathcal{S}_g)\mathcal{FI}(\mathcal{H}_g)$  なる作用素を考える. この作用素は行列によって与えられるため, その固有値を標準的な数値計算法によって求めることができる. 定義域の滑らかさを表す任意の  $n \in \mathbb{N}_0$  と, 任意の区間分割数  $N \in \mathbb{N}$  に対する当該作用素の行列表現は, 以下のように与えられる.

定理 3.8. 作用素  $\mathcal{I}(\mathcal{S}_g)\mathcal{FI}(\mathcal{H}_g)$  は以下の行列  $F_g$  となる.

$$F_g = \mathcal{I} \left( \begin{bmatrix} I_{N+1} \otimes C \\ I_{N+1} \otimes (CA) \\ \vdots \\ I_{N+1} \otimes (CA^n) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} A_d & F_{12}R \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0_{n_x} & 0_{n_x \times m_u(n+1)(N+1)} \\ 0_{m_u(n+1)(N+1) \times n_x} & X \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

ここで

$$M_j = \int_0^1 \tau^j e^{Ah'(1-\tau)} B d\tau, \quad j = 0, \dots, 2n+1, \\ \widehat{M} = \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \cdots & M_{2n+1} \end{bmatrix}, \quad \widehat{Q} = h' \widehat{M} V^{-1} D, \\ \begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 & \cdots & Q_{2n+1} \end{bmatrix} = \widehat{Q}, \quad A'_d = e^{Ah'}, \\ \tilde{F}_{21} = \begin{bmatrix} I \\ A'_d \\ \vdots \\ (A'_d)^{N-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{F}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ I & 0 & \ddots & \vdots \\ \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ (A'_d)^{N-2} & \cdots & I & 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{cases} T_l = Q_l + A'_d Q_{l+1}, \\ R_l = \text{blockdiag}[Q_l, I_{N-1} \otimes T_l, A'_d Q_{l+1}], \\ P_l = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times m_u} & 0_{n_x \times m_u N} \\ \tilde{F}_{21} Q_l & \tilde{F}_{22}(I_N \otimes T_l) + (I_N \otimes Q_{l+1}) \end{bmatrix}, \end{cases} \\ (l = 0, 2, \dots, 2n), \\ F_{12} = \begin{bmatrix} (A'_d)^{N-1} & \cdots & A'_d & I & (A'_d)^{-1} \end{bmatrix}, \\ R = \begin{bmatrix} R_0 & R_2 & \cdots & R_{2n} \end{bmatrix}, \quad F_{21} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{21} \\ A_d \end{bmatrix}, \\ F_{22} = \begin{bmatrix} P_0 & P_2 & \cdots & P_{2n} \end{bmatrix}, \\ X = \begin{bmatrix} 0_{m_u(N+1)} & \cdots & 0 & 0 \\ I_{N+1} \otimes (CB) & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ I_{N+1} \otimes (CA^{n-1}B) & \cdots & I_{N+1} \otimes (CB) & 0_{m_u(N+1)} \end{bmatrix}$$

である.

証明. データベクトル  $\check{d} \in \mathbb{R}^{m_u(n+1)(N+1)}$  から生成される区分的多項式を  $\tilde{u}(\cdot)$  とする. 定義より,  $F_g$  の作用は  $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$  と  $\check{d}$  を用いて次のように表せる.

$$F_g \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \check{d} \end{bmatrix} = \mathcal{I}(\mathcal{S}_g)\mathcal{FI}(\mathcal{H}_g) \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \check{d} \end{bmatrix} = \mathcal{I}(\mathcal{S}_g)\mathcal{F} \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{u}(\cdot) \end{bmatrix}$$

そこで

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ y(\cdot) \end{bmatrix} = \mathcal{F} \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{u}(\cdot) \end{bmatrix}, \quad \tilde{y} = \mathcal{S}_g y(\cdot), \quad (3.47)$$

$\tilde{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{m_u(n+1)(N+1)}$  とおくと,  $F_g$  は

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = F_g \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{d} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

を満たす行列として定まる. ここで  $\tilde{x}_1$  について考えると式 (3.2), (3.3), (3.48) より

$$\tilde{x}_1 = e^{Ah} \left\{ \tilde{x}_0 + \int_0^h e^{-A\tau} B \tilde{u}(\tau) d\tau \right\} \quad (3.49)$$

である. いま第  $k$  区間の補間多項式  $\tilde{u}_k$  に対応する  $q(\xi) = \sum_i a_i \xi^i$  の係数ベクトルは, 同区間の補間条件に対応する  $v$  を  $v(k)$  で表すとき, 式 (3.12) より  $a = V^{-1} Dv(k)$  で与えられるのであった. これに基づいて上式の定積分を計算すると  $\tilde{x}_1$  は

$$\tilde{x}_1 = A_d \left\{ \tilde{x}_0 + \sum_{l=0}^{N-1} (A'_d)^{-l-1} \widehat{Q}v(l) \right\}, \quad (3.50)$$

となる. 次に, 式 (3.48) 左辺における 2 番目の出力  $\tilde{y}$  について考える. 関数  $y$  は式 (3.47) より

$$y(\theta) = C e^{A\theta} \left\{ \tilde{x}_0 + \int_0^\theta e^{-A\tau} B \tilde{u}(\tau) d\tau \right\}, \quad (3.51)$$

$\theta \in [0, h)$  で与えられ, その  $i$  階導関数は

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^i y(\theta) &= C A^i e^{A\theta} \left\{ \tilde{x}_0 + \int_0^\theta e^{-A\tau} B \tilde{u}(\tau) d\tau \right\} \\ &\quad + \sum_{l=1}^i C A^{i-l} B \tilde{u}^{(l-1)}(\theta), \quad i = 0, \dots, n \end{aligned} \quad (3.52)$$

となる. したがって先と同様に積分項を計算すれば

$$y_k^{(i)} = C A^i (A'_d)^k \left\{ \tilde{x}_0 + \sum_{l=0}^{k-1} (A'_d)^{-l-1} \widehat{Q}v(l) \right\} + \sum_{l=1}^i C A^{i-l} B d_{l-1}(k), \quad (3.53)$$

を得る. このとき  $\tilde{y}_i = \mathcal{S} \mathcal{D}^i y(\theta)$  とすると,

$$\tilde{y} := \begin{bmatrix} \tilde{y}_0 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{bmatrix}^T, \quad \tilde{y}_i = \begin{bmatrix} y_0^{(i)} \\ \vdots \\ y_N^{(i)} \end{bmatrix}, \quad i = 0, \dots, n$$

を得る．データベクトル  $v(\cdot)$  と  $\check{d}$  の対応を考慮すると，式 (3.50), (3.53) より式 (3.46) を得る．

□

行列表現 (3.46) は,  $n = 0$  および  $n = 1$  とすると, それぞれ先行研究における FSFFOH 法, FSFHI 法の結果と一致する．

なお  $A'_d, M_j, j = 0, \dots, 2n + 1$  の値は, 行列指数関数を用いて以下のように計算できる [52]. 行列  $A, B$  に対して

$$U = \begin{bmatrix} Ah' & B & 0 \\ 0 & 0 & I_{2n+1} \otimes I_{m_u} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とし,  $J_j \in \mathbb{R}^{n_x \times m_u}, j = 0, \dots, 2n + 1$  を

$$\begin{bmatrix} J & J_0 & J_1 & \cdots & J_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0_{n_x \times (2n+2)m_u} \end{bmatrix} e^U$$

と定めるとき,  $A'_d = J$ ,

$$M_j = \int_0^1 \tau^j e^{Ah'(1-\tau)} B d\tau = j! J_j,$$

$j = 0, \dots, 2n + 1$  である．

### 3.5 数値計算による検討

本節では, 数値例を通して, まず提案法の計算誤差の収束性を確認する．さらに, 高次ホールド近似の次数を変化させたときの計算効率の挙動について検討する．

ホールド多項式の次数に対応したそれぞれの関数空間において, 提案法が数学的に妥当な近似になっていることは, 第 4 節で示した．これに加えて, 異なる空間上で定義されたモノドロミ作用素の非零スペクトルに関する数学的性質 [54] が重要である．一般の作用素においては定義域が異なればそのスペクトルも異なりうるが, 参考文献 [54] は  $C^0[0, h), C^1[0, h), L_2[0, h), L_\infty[0, h)$  上のモノドロミ作用素  $\mathcal{F}$  について, その非零スペクトルが,  $\mathcal{F}$  の定義される関数空間に依存しないという特徴を明らかにしている．同様の議論を  $C^n[0, h)$  の場合にも拡張することができるため, これによって異なる  $n$  に対する異なる関数空間  $C^n[0, h)$  上で定義された  $\mathcal{F}$  のスペクトル計算結果を比較することが正当化される．

### 3.5.1 近似誤差の収束性

第4節の議論は、区間分割数の増加に対する作用素  $\mathcal{F}_g$ 、または行列  $F_g$  の非零スペクトルの真値への収束を理論的に保証する。この結果からは誤差上界や収束速度等を見積もることはできないが、少なくとも計算誤差の漸近的な挙動が正しいことを、簡単な例を用いてまず確認しよう。ここでは、参考文献 [30] と同様、1次元のむだ時間系

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{2}x(t) - x(t-h)$$

について考える。いま  $y(t) = x(t)$  とすると、 $A = -1/2$ ,  $B = -1$ ,  $C = 1$  である。 $h = 4\sqrt{3}\pi/9$  のとき、系は安定限界となることが分かっており、そのときの  $\mathcal{F}$  のスペクトル半径は 1, 単位円周上の固有値は  $-1/2 \pm j\sqrt{3}/2$  である。単位円周上の固有値の一方を  $\lambda$ , 近似計算で得た対応する値を  $\lambda'$  とし、誤差  $E$  を  $E = |\lambda - \lambda'|$  と定める。補間多項式の次数を  $n_p$  で表すことにする。空間  $C^n[0, h)$  上の  $\mathcal{F}$  を考えるとき、対応する次数  $n_p$  は  $2n + 1$  となる。

Fig. 3.2 は、倍精度浮動小数点演算を用いた際の、 $n_p = 3, 7, 13$  に対する分割数  $N$  と誤差  $E$  の関係を示している。座標軸は両対数であるので、理論に従うならば ( $N$  が大なるとき) グラフは右下がりになることが期待される。これに対して、近似誤差が  $10^{-10}$  を下回るあたりまでは、 $N$  の増加にともなって誤差  $E$  が単調に減少しているが、誤差がそれよりも小さい領域では傾向がはっきりしなくなっている。この領域は倍精度浮動小数点演算の精度限界 (Machine Epsilon) ( $10^{-15}$  程度) に近く、このことが誤差の頭打ち傾向の一因となりえる。

そこで次に Matlab の Symbolic math toolbox に含まれる可変精度演算 (Variable Pre-

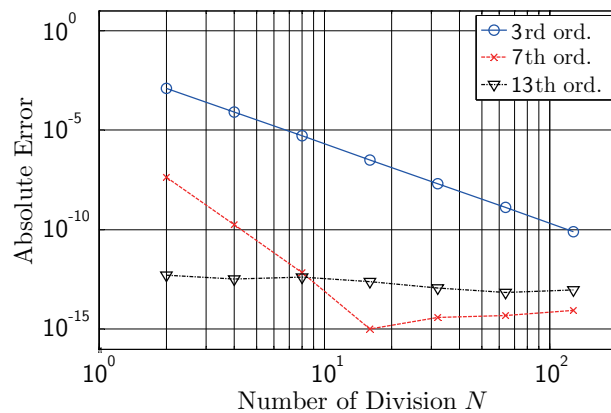


Fig. 3.2: 3, 7, 13 次近似による近似誤差

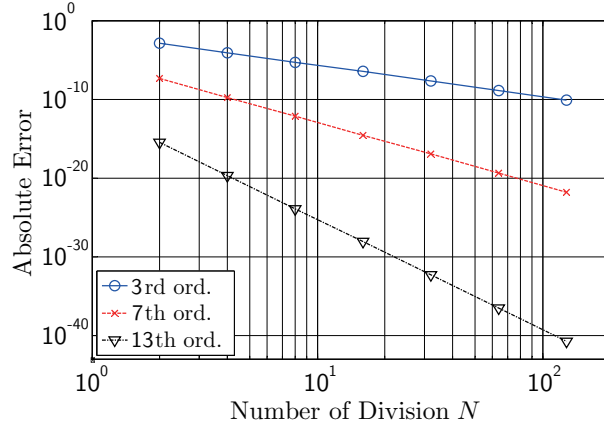


Fig. 3.3: VPA(50 桁) による近似誤差

cision Arithmetic:VPA) を用いて同一の計算をおこなった. Fig. 3.3 に有効桁数 50 桁<sup>\*4</sup> の場合の  $n_p = 3, 7, 13$  に対する計算結果を示す. いずれの  $n_p$  においても, 分割数の増加とともに誤差が単調減少しており, 理論的な誤差の漸近特性と整合する結果が得られた. また, 近似の次数が大きいほどグラフは下に位置しており, さらにその傾きも大きくなっている. これは高次近似の場合の方が, 分割数の増加に対する誤差の収束速度の改善効果が大きいことを示している.

行列  $F_g$  は  $n_x + m_u(n+1)(N+1)$  次の正方行列である. いま  $n_x, m_u$  は問題設定により固定されるので,  $N$  が同じであるとき, 高次ホールドの使用によって  $n$  が増加すれば行列表現の次数は増加する. しかし, 同レベルの計算精度要求に対して,  $n$  が増加しても分割数  $N$  が少なくてすめば, 結果的に行列の固有値計算の負荷が少なくなり, 計算効率も向上する可能性がある. 例えば, Fig. 3.3 において, 誤差レベル  $E < 10^{-10}$  を要求したとき,  $n_p = 3, 7$  で必要な分割数をそれぞれ  $N = 100, 4$  と見積もると,  $n_p = 7$  に対する行列  $F_g$  のサイズは  $n_p = 3$  のときに比べて  $n+1$  が 2 倍 ( $2 \rightarrow 4$ ),  $N+1$  が約  $1/20$  倍 ( $101 \rightarrow 5$ ) なので, 約  $1/10$  となる ( $n_x = m_u = 1$ ). また  $E < 10^{-20}$  で  $n_p = 7, 13$  を比較しても,  $N+1: 70 \rightarrow 5, n+1: 4 \rightarrow 7$  で,  $F_g$  のサイズは  $1/8$  程度となる. このように, 分割数  $N$  の減少しろが大きいことは, 上述の下側のグラフほど傾きが大きい (近似次数が高いほど収束速度が大きい) ことに関係している.

<sup>\*4</sup> 通常このような計算精度が求められるとは考えにくく, これはあくまで誤差の漸近特性の検証ための設定である. VPA は倍精度浮動小数点演算と比べて 100 倍以上の計算時間を要し, 計算効率の面からも実用的でない.



### 3.5.2 計算効率

前小節では数値例を通して、一定の誤差レベルを目標とすると、近似次数  $n_p$  を増加させて固有値計算に用いる行列  $F_g$  の次数を削減できる場合があることを示した。これは先行研究 [30] における 0, 1, 3 次ホールドまでの傾向がその後もしばらくは維持されることを示唆している。

しかし一方で、直感的には計算効率の単調な改善にはおのずと限界があるはずである。前小節での結果をふまえると、具体的には以下のような状況が想定される。低次の近似の場合には  $n \ll N$  であり、（同程度の計算精度を要求した場合） $n$  を増加させたときの  $N$  の減少割合が大きいいため、結果的に行列の次数が小さくなる。ところが近似の次数が増加し、例えば  $n$  と  $N$  の大小関係が逆転すると、次数増にともなう分割数減の効果が薄れ、行列サイズの減少が頭打ちとなる\*5。基本的にはこのようなトレードオフによって、行列サイズが下限値をとることが計算効率の限界をもたらすと予想される。

そこで、ここではさらなる数値例によって、行列の構成や固有値計算を含めたトータルの計算時間を計測し、近似次数と計算効率の関係を調べる。文献 [30] と同様、以下の 2 次元のむだ時間系を取り上げる。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Gx(t-h), G = BC,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4.4 & 0.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0.4 \quad 0.2].$$

この系は、 $h$  に関する区間安定性を有し、 $h \in ((4k+1)\pi/4, (2k+1)\sqrt{30}\pi/12), k = 0, 1, 2$  のとき安定となることが分かっている。むだ時間長  $h$  が安定区間の端点にあるときの  $\mathcal{F}$  の単位円周上の固有値は、

$$\begin{cases} \pm j & (h = (4k+1)\pi/4) \\ -1 \pm j0 & (h = (2k+1)\sqrt{30}\pi/12) \end{cases}, k = 0, 1, 2$$

となる。先の例題と同様に、 $h = 5\sqrt{30}\pi/12$  のときの単位円周上の固有値に対する絶対誤差  $E$  を評価する。補間多項式の次数  $n_p$  を 3 から 21 次まで変化させ、近似誤差が  $10^{-6}$  以下となる最小の分割数  $N$  を求めた。なお、標準的な意味での計算速度を比較するために、誤差レベルは VPA を必要としない値に設定した。各  $n_p$  に対して、必要な分割数  $N$ 、絶対誤差  $E$ 、

---

\*5 先行研究における近似次数ではこのような逆転現象は起こらないため、計算効率の改善が単調であったと解釈できる。

行列  $F_g$  のサイズ, 計算所要時間 (1000 回の試行の平均値) をまとめると Table 3.1 のようになる. 使用した計算環境は, OS: Windows 7, CPU: i7-4790 3.60GHz, Memory: 16GB, Software: Matlab r2014a であり, 浮動小数点演算は倍精度でおこなった. 固有値計算の対象となる行列のサイズは, 近似次数  $n_p$  の増大につれて小さくなりやがて増加傾向に転ずる. 一点  $n_p = 17$  だけを例外的な値とすれば, おおむね前述のシナリオと整合する挙動といえる. 次数  $n_p = 17$  の場合を例外的と考える根拠は以下のとおりである. 分割数  $N$  が小さくなると,  $N$  の単位変化に対する誤差の変化幅が大きくなり, 結果的に同一の誤差レベルとはならないことが起こりうる. 実際,  $n_p = 17$  のときの誤差  $E$  は突出して小さい. この量子化の影響による誤差レベルの不均一によって,  $n_p = 17$  のときの行列サイズは, ある意味で必要以上に大きくなっており, これが行列サイズの不規則な変化もたらしたのではないかと考えられる.

Fig. 3.4 は, 近似次数の増加に伴う計算時間の変化を表現している. 見やすさのために,  $n_p = 3$  のときの計算時間との比を片対数グラフで表示した. 計算時間は  $n_p = 9$  で最小となり, その後は漸増する. 一方, 行列サイズは  $n_p = 19$  のときが最小であったので, 両者の (下側の) ピークにはずれが生じている. 固有値計算に先立って行列  $F_g$  を構成するための処理は,  $n_p$  の増加とともに複雑化するため, これに要する時間も  $n_p$  とともに増大する. このオーバーヘッドの存在によって最小点が左側にずれていると考えられる. 計算効率が最大 (計算時間が最小) となる次数は例題に依存すると思われるが, 近似次数を上げていくと計算効率

Table 3.1: 誤差上限を定めた場合の計算結果

$n_p$	$N$	$E$	size	time
3	105	$9.46 \times 10^{-7}$	214	$1.44 \times 10^{-1}$
5	25	$8.23 \times 10^{-7}$	80	$6.94 \times 10^{-3}$
7	11	$8.88 \times 10^{-7}$	50	$4.13 \times 10^{-3}$
9	7	$4.00 \times 10^{-7}$	42	$3.92 \times 10^{-3}$
11	5	$1.66 \times 10^{-8}$	38	$4.05 \times 10^{-3}$
13	4	$5.07 \times 10^{-8}$	37	$4.36 \times 10^{-3}$
15	3	$6.71 \times 10^{-8}$	34	$4.75 \times 10^{-3}$
17	3	$1.52 \times 10^{-9}$	38	$5.22 \times 10^{-3}$
19	2	$6.02 \times 10^{-8}$	32	$5.53 \times 10^{-3}$
21	2	$1.37 \times 10^{-8}$	35	$6.22 \times 10^{-3}$

が次第に改善し, ある時点で限界を迎えた後に増加する, という合理的な定性的挙動を検証することができた.

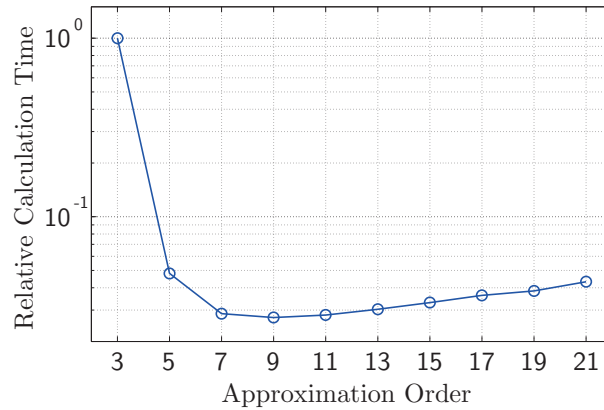


Fig. 3.4: 近似次数と計算時間

### 3.6 本章のまとめ

本章では, むだ時間系の安定解析に関連するモノドロミ作用素のスペクトル計算について考察した. 高次多項式ホールド関数を用いた高速サンプル/ホールド近似に基づく数値計算法を考えるにあたって, まず各関数空間  $C^n[0, h)$  での近似手続きの妥当性の証明を与えた. 次に任意の  $n$  に対応した近似作用素の行列表現を導出し, 数値例を用いて, 有効桁数を十分に確保した場合には理論どおりの誤差の漸近特性が得られることを確認した. また, 高次ホールドを用いた場合の計算効率の改善効果とその限界について, 数値例によって検証をおこない, おおむね予想と一致する結果を得た.

## 第 4 章

# 連続時間状態予測制御系の閉ループ極

離散時間におけるむだ時間系は高々有限次元のシステムであるため、連続時間の場合と比べれば、その解析は見通しが立ちやすい。離散時間入力むだ時間系に対する極配置法やその閉ループ極の解析については検討がなされている [38]。とくに 1.3 節で述べたように状態予測制御系の閉ループ極は、むだ時間分の入力も状態と見なした拡大系にもとづき、 $A_d + B_d F_d$  の固有値と入力次数  $m_u$ 、遅延ステップ数  $D$  により重複度  $m_u D$  の原点極で構成されることが示されている [37, 39]。すなわち、これはむだ時間長に対応した極が閉ループ内部に残っていることを意味している。

一方で、連続時間の入力むだ時間系に対して状態予測制御（有限極配置）を用いると、 $A + BF$  の固有値以外の閉ループ極は自動的に消去される、と述べられており [32]、これは前述の離散時間系に対する考察と対応しない。これは離散時間の場合には非零の初期値を暗に考慮した状態空間に基づく解析であるのに対して、連続時間での従来研究は初期値を零としたラプラス変換を用いているためであると考えられる。

連続時間の場合においても、閉ループ内部には時間遅れ要素が存在するため、なんらかの影響があると考えることが自然であると考えられる。別の文献 [8] では  $A + BF$  の固有値以外は  $-\infty$  に存在する、といった記述があるものの、数学的には示されていない。そこで本章では、連続時間状態予測制御系の状態空間における拡大系を抽象的微分方程式表現として導出し、その閉ループスペクトルを解析し、それらがダイナミクスにどのように影響するか考察する。

本章の構成は次の通りである。まず、第 1 節で問題設定について述べ、第 2 節でレゾルベ

ントを具体的に求め、そこから抽象的微分方程式を導出する。第 3 節にて、抽象的微分方程式のスペクトルを解析し、閉ループ極のダイナミクスへの影響を考察する。第 4 節で数値例を用いてスペクトル分布の確認をおこない、そして第 5 節で本章をまとめる。

## 4.1 問題設定

以下では連続時間入力むだ時間系

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - h), \quad h \in \mathbb{R}_+, \quad (4.1)$$

$x(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $u(\cdot) \in \mathbb{R}^{m_u}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n_x \times m_u}$  に対して、状態予測制御を適用した閉ループ系の作用素表現を導出し、そのスペクトルを示す。ただし、対  $(A, B)$  は可制御、すなわち  $A + BF$  の固有値を行列  $F \in \mathbb{R}^{m_u \times n_x}$  により任意に指定できるとする。

連続時間系 (4.1) に対する状態予測制御則は

$$u(t) = Fe^{Ah} \left\{ x(t) + \int_0^h e^{-A\tau} Bu(t + \tau - h) d\tau \right\} \quad (4.2)$$

で与えられる。離散時間系におけるむだ時間要素は有限次元系となるのに対して、連続時間系では無限次元系として取り扱わねばならない。したがって、その閉ループ表現も行列ではなく作用素として記述する必要がある。[7] では遅れ型むだ時間系の作用素表現とそのスペクトル解析について述べている。そこで以下では、[7] を参考にしつつ状態予測制御系の閉ループ系を表現する作用素を導出し、そのスペクトルを求める。

入力むだ時間系 (4.1) 式に対し初期条件  $x(0) = x_0$ ,  $u(\theta) = f_0(\theta)$ ,  $\theta \in [-h, 0)$  が与えられるとする。ただし、 $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $f_0(\cdot) \in L_2([-h, 0]; \mathbb{R}^{m_u})$  である。このとき、(4.1), (4.2) 式からなる閉ループ系の状態遷移に関する半群表現を考える。以下のように内積を定義したヒルベルト空間  $\mathcal{H} := \mathbb{R}^{n_x} \oplus L_2([-h, 0]; \mathbb{R}^{m_u})$  を定める。

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ f_1(\cdot) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2(\cdot) \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} := \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbb{R}^{n_x}} + \langle f_1, f_2 \rangle_{L_2([-h, 0]; \mathbb{R}^{m_u})}$$

また、空間  $\mathcal{H}$  におけるノルムは

$$\left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ f_1(\cdot) \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ f_1(\cdot) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ f_1(\cdot) \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

により与える。時刻  $t \geq 0$  における  $\mathcal{H}$  上の作用素  $\mathcal{T}(t)$  を

$$\mathcal{T}(t) \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t + \cdot) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

と定義する．このとき次の定理が成り立つ．

**定理 4.1.**  $\mathcal{T}(t)$  は次の性質を有する．

1. 任意の  $t \geq 0$  に対して  $\mathcal{T}(t)$  は  $\mathcal{H}$  上の線形作用素である．
2.  $\mathcal{T}(t)$  は  $\mathcal{H}$  上の強連続半群となる．

定理 4.1 の証明は Curtain ら [7] の Theorem 2.4.4 とほぼ同様であるため省略する．

## 4.2 抽象的微分方程式表現の導出

$\mathcal{T}(t)$  の無限小生成作用素  $\mathcal{A}$  をそのレゾルベント  $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$  を経由して特徴づける．一般にレゾルベントについて次の補題が知られている．

**補題 4.2.** [[7]]  $\mathcal{T}(t)$  は  $\mathcal{A}$  により生成される強連続半群であり，その成長上限は  $\omega_0$  とする．このとき， $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega_0$  であれば， $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$  であり，任意の  $z \in \mathcal{Z}$  について

$$(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}z = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathcal{T}(t)z dt \quad (4.4)$$

上記補題を用いて，まず状態予測制御系のレゾルベントを導出する．

**補題 4.3.** (4.3) 式で定義された強連続半群  $\mathcal{T}(t)$  とその無限小生成作用素  $\mathcal{A}$  について考える．十分大きな  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対してレゾルベントは

$$(\alpha I - \mathcal{A})^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \psi(\cdot) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

で与えられる．ただし， $\theta \in [-h, 0]$ ，

$$\psi(\theta) = e^{\alpha\theta} F [\Delta(\alpha)]^{-1} \bar{x}(h) - \int_0^\theta e^{\alpha(\theta-\eta)} f_0(\eta) d\eta \quad (4.6)$$

$$\phi = \int_0^h e^{-\alpha\eta} x(\eta) d\eta + e^{-\alpha h} [\Delta(\alpha)]^{-1} \bar{x}(h) \quad (4.7)$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda I - A - BF, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (4.8)$$

$$\bar{x}(\theta) = e^{A_c\theta} x_0 + \int_0^\theta e^{A(\theta-\tau)} B f_0(\tau - h) d\tau \quad (4.9)$$

である．また，次の関係を満たす．

$$\alpha\phi = x_0 + A\phi + B\psi(-h) \quad (4.10)$$

証明. 補題 4.2 より,  $\alpha > \omega_0$  に対して

$$\begin{aligned} (\alpha I - \mathcal{A})^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \mathcal{T}(t) \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t + \cdot) \end{bmatrix} dt \end{aligned}$$

を得る.  $\phi$  と  $\psi(\theta)$ ,  $\theta \in [-h, 0]$  を

$$\phi = \int_0^\infty e^{-\alpha t} x(t) dt \quad (4.11)$$

$$\psi(\theta) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} u(t + \theta) dt \quad (4.12)$$

と定義する.  $\psi$  は変数変換を施すと

$$\psi(\theta) = \int_\theta^\infty e^{-\alpha(\eta-\theta)} u(s) d\eta$$

と表現でき,

$$\frac{d\psi}{d\theta}(\theta) = \alpha\psi(\theta) - u(\theta), \quad \theta \in [-h, 0] \quad (4.13)$$

の解であることがわかる. 上式を定数変化法を用いて解くことで,

$$\psi(\theta) = e^{a\theta} \psi(0) - \int_0^\theta e^{a(\theta-\eta)} f_0(s) d\eta, \quad (4.14)$$

$\theta \in [-h, 0]$  となる. 次に  $\phi$  について式 (4.11) より

$$\begin{aligned} \alpha\phi &= \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} x(t) dt \\ &= -[e^{-\alpha t} x(t)]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\alpha t} \dot{x}(t) dt \\ &= x(0) + \int_0^\infty e^{-\alpha t} [Ax(t) + Bu(t-h)] dt \\ &= x_0 + A\phi + B\psi(-h) \end{aligned} \quad (4.15)$$

を得る. 上式に式 (4.14) を代入すると

$$\alpha\phi = x_0 + A\phi + e^{-\alpha h} B\psi(0) + \int_{-h}^0 e^{-\alpha(h+\tau)} f_0(\eta) d\eta \quad (4.16)$$

となる。また,

$$\begin{aligned}
\psi(0) &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} u(t) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\alpha t} F e^{A h} \left( x(t) dt + \int_0^h e^{-A \tau} B u(t + \tau - h) d\tau \right) dt \\
&= F e^{A h} \phi + F e^{A h} \int_0^h e^{-A \tau} B \psi(\tau - h) d\tau \\
&= F e^{A h} \phi + F e^{A h} \int_0^h e^{-A \tau} B \left( e^{\alpha(\tau-h)} \psi(0) - \int_0^{\tau-h} e^{\alpha(\tau-h-\eta)} f_0(\eta) d\eta \right) d\tau
\end{aligned} \tag{4.17}$$

であるので, 式 (4.16), (4.17) を整理して

$$\Gamma \begin{bmatrix} \phi \\ \psi(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B V(\alpha) + r \\ F W(\alpha) \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

と表す。ただし,

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \begin{bmatrix} \alpha I - A & -e^{\alpha h} B \\ -F e^{A h} & I - F e^{A h} M(\alpha) \end{bmatrix}, \\
M(\alpha) &= \int_0^h e^{A(h+\eta)} B e^{-\alpha \eta} d\eta, \\
V(\alpha) &= \int_0^h e^{\alpha(\eta-h)} u(-\eta) d\eta, \\
W(\alpha) &= \int_0^h \int_\eta^h e^{A \tau} B u(-\eta) e^{\alpha(\eta-\tau)} d\tau d\eta
\end{aligned}$$

である。 $\Xi = \Gamma^{-1}$  とすると,

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{bmatrix}, \tag{4.19}$$

$$\Xi_{11} = (I - M(\alpha) F e^{A h}) (\alpha I - A - e^{-A h} B F e^{A h})^{-1} \tag{4.20}$$

$$\Xi_{12} = \Xi_{11} e^{-A h} B - M(\alpha) \tag{4.21}$$

$$\Xi_{21} = F e^{A h} (\alpha I - A - e^{-A h} B F e^{A h})^{-1} \tag{4.22}$$

$$\Xi_{22} = \Xi_{21} e^{-A h} B + I \tag{4.23}$$

を得る。いま  $M(\alpha)$  について

$$(\alpha I - A) M(\alpha) = e^{-A h} B - e^{s h} B \tag{4.24}$$



に注意すると

$$I - M(\alpha)Fe^{Ah} = (\alpha I - A)^{-1} \{ (\alpha I - A - e^{-Ah}BF e^{Ah}) + e^{-\alpha h}BF e^{Ah} \}$$

となる. 上式を式 (4.20) に代入すると,  $\Xi_{11}$  は

$$\begin{aligned} & (\alpha I - A)^{-1} \{ I + e^{-\alpha h}BF(\alpha I - A - BF)^{-1}e^{Ah} \} \\ & = (\alpha I - A)^{-1}(I - e^{-\alpha h}e^{Ah}) + e^{-\alpha h}(\alpha I - A - BF)^{-1}e^{Ah} \end{aligned} \quad (4.25)$$

と書ける. 以下では, 上式の右辺第一項を次のように表記する.

$$N(\alpha) := \int_0^h e^{At}e^{-\alpha t}dt = (\alpha I - A)^{-1}(I - e^{-\alpha h}e^{Ah}) \quad (4.26)$$

式 (4.24), (4.25) より

$$\Xi_{11}e^{-Ah}B = M(\alpha) + e^{-\alpha h}(\alpha I - A - BF)^{-1}B$$

であるため,  $\Xi_{12}$  は

$$\Xi_{12} = e^{-\alpha h}(\alpha I - A - BF)B \quad (4.27)$$

で与えられる. ここで, 式 (4.25), (4.26), (4.27) を用いて  $\phi = \phi_1 + \phi_2$  と分割する.  $\phi_1, \phi_2$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} \phi_1 &= N(\alpha)(BV(\alpha) + x_0) \\ \phi_2 &= e^{-\alpha h}(\alpha I - A - BF)^{-1} \{ e^{Ah}(BV(\alpha) + x_0) + BFW(\alpha) \} \end{aligned}$$

である. 式 (4.1) の両辺に  $e^{-\alpha t}$  を掛け,  $t$  に関して区間  $[0, h]$  で積分し整理すると

$$\begin{aligned} & \int_0^h x(t)e^{-\alpha t}dt \\ &= (\alpha I - A)^{-1} \{ x_0 - e^{-\alpha h}\bar{x}(h) + BV(\alpha) \} \\ &= N(\alpha)x_0 - e^{-\alpha h}(\alpha I - A)^{-1} \int_0^h e^{A\eta}Bu(-\eta)d\eta + (\alpha I - A)^{-1}BV(\alpha) \end{aligned} \quad (4.28)$$

となる. また,

$$N(\alpha)BV(\alpha) = (I - e^{-\alpha h}e^{Ah})(\alpha I - A)^{-1}BV(\alpha) \quad (4.29)$$

$$W(\alpha) = (\alpha I - A)^{-1} \int_0^h e^{A\eta}Bu(-\eta)d\eta - (\alpha I - A)^{-1}e^{Ah}BV(\alpha) \quad (4.30)$$

と計算できる. したがって,  $\phi_1$  は

$$\phi_1 = \int_0^h x(t)e^{-\alpha t}dt + e^{-\alpha h}W(\alpha) \quad (4.31)$$

と書き換えることができる. 次いで  $\phi_2$  について考える.

$$(\alpha I - A - BF)^{-1}BF = -I + (\alpha I - A - BF)^{-1}(\alpha I - A) \quad (4.32)$$

であることに注意し, 式 (4.30) より,  $\phi_2$  は

$$\begin{aligned} & e^{-\alpha h}(\alpha I - A - BF)^{-1}e^{Ah}(BV(\alpha) + x_0) \\ & + e^{-\alpha h} \{ -I + (\alpha I - A - BF)^{-1}(\alpha I - A) \} W(\alpha) \\ & = -e^{-\alpha h}W(\alpha) + e^{-\alpha h}(\alpha I - A - BF)^{-1} \left( e^{Ah}x_0 + \int_0^h e^{A\eta}Bf_0(-\eta)d\eta \right) \\ & = -e^{-\alpha h}W(\alpha) + e^{-\alpha h}(\alpha I - A - BF)^{-1}\bar{x}(h) \end{aligned} \quad (4.33)$$

となる. よって式 (4.31), (4.33) より式 (4.7) を得る.

また, 式 (4.22) について

$$e^{Ah}(\alpha I - A - e^{-Ah}BF e^{Ah})^{-1} = (\alpha I - A - BF)^{-1}e^{Ah}$$

に注意すると

$$\Xi_{22} = F(\alpha I - A - BF)^{-1}B + I \quad (4.34)$$

と書ける. 式 (4.32), (4.30), (4.34) より

$$\Xi_{22}FW(\alpha) = F(\alpha I - A - BF)^{-1} \left\{ \int_0^h e^{A\eta}Bu(-\eta)d\eta - e^{Ah}BV(\alpha) \right\}$$

であるから,  $\psi(0)$  は

$$\begin{aligned} & \Xi_{21}(BV(\alpha) + x_0) + \Xi_{22}FW(\alpha) \\ & = F(\alpha I - A - BF)^{-1} \left\{ e^{Ah}x_0 + \int_0^h e^{A\eta}Bf_0(-\eta)d\eta \right\} \\ & = F(\alpha I - A - BF)^{-1}\bar{x}(h) \end{aligned} \quad (4.35)$$

となる. したがって, 式 (4.14) に式 (4.35) を代入し式 (4.6) を得る.  $\square$

次いで, 上記の定理にもとづいて生成作用素  $\mathcal{A}$  を特徴づける.

定理 4.4. (4.3) 式で与えられる強連続半群の無限小生成作用素は

$$\mathcal{A} \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_0 + Bf_0(-h) \\ \frac{df_0}{d\theta}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

で与えられ, その定義域は

$$\begin{aligned} \text{dom}(\mathcal{A}) = & \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \mid f_0 \text{ は絶対連続, } \frac{df_0}{d\theta}(\cdot) \in L_2([-h, 0]; \mathbb{R}^{m_u}), \right. \\ & \left. f_0(0) = Fe^{Ah} \left( x_0 + \int_0^h e^{-A\tau} Bf_0(\tau - h) d\tau \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.37)$$

である.

証明. 作用素  $\tilde{\mathcal{A}}$  とその定義域を以下のように定義する.

$$\tilde{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_0 + Bf_0(-h) \\ \frac{df_0}{d\theta}(\cdot) \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \text{dom}(\tilde{\mathcal{A}}) = & \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \mid f_0 \text{ は絶対連続, } \frac{df_0}{d\theta}(\cdot) \in L_2([-h, 0]; \mathbb{R}^{m_u}), \right. \\ & \left. f_0(0) = Fe^{Ah} \left( x_0 + \int_0^h e^{-A\tau} Bf_0(\tau - h) d\tau \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.39)$$

このとき, (4.3) 式で与えられる強連続半群の無限小生成作用素  $\mathcal{A}$  と  $\tilde{\mathcal{A}}$  が等しいことを示す. いま, 補題の結果を満たす十分大きな  $\alpha$  について考える.  $(\alpha I - \tilde{\mathcal{A}})$  の逆作用素が  $(\alpha I - \mathcal{A})^{-1}$  に等しければ,  $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$  となる. (4.6), (4.7), (4.10) 式より,  $\begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} \in \mathcal{H}$  に対して

$$\begin{aligned} (\alpha I - \tilde{\mathcal{A}})(\alpha I - \mathcal{A})^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} &= (\alpha I - \tilde{\mathcal{A}}) \begin{bmatrix} \phi \\ \psi(\cdot) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha\phi - A\phi - B\psi(-h) \\ \alpha\psi(\cdot) - \frac{d\psi}{d\theta}(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.40)$$

となる. つぎに  $\begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} \in \text{dom}(\mathcal{A})$  に対して  $(\alpha I - \mathcal{A})^{-1}(\alpha I - \tilde{\mathcal{A}}) \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix}$  となることを示す.  $\begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} \in \text{dom}(\mathcal{A})$  としたとき

$$\begin{bmatrix} x_{i1} \\ f_{i1}(\cdot) \end{bmatrix} := (\alpha I - \mathcal{A})^{-1}(\alpha I - \tilde{\mathcal{A}}) \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix}$$

とする。上式の両辺に  $(\alpha I - \tilde{\mathcal{A}})$  をかけ、(4.40) 式より

$$(\alpha I - \tilde{\mathcal{A}}) \begin{bmatrix} x_{i1} \\ f_{i1}(\cdot) \end{bmatrix} = (\alpha I - \tilde{\mathcal{A}}) \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix}$$

であるので  $\begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ f_{i1}(\cdot) \end{bmatrix}$  となるためには  $(\alpha I - \tilde{\mathcal{A}})$  は単射でなければならない。いま、

$$(\alpha I - \tilde{\mathcal{A}}) \begin{bmatrix} x_{i0} \\ f_{i0}(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を満たす非零の  $z_0 := \begin{bmatrix} x_{i0} \\ f_{i0}(\cdot) \end{bmatrix} \in \text{dom}(\tilde{\mathcal{A}})$  が存在すると仮定する。 $\tilde{\mathcal{A}}$  の定義より、

$$(\alpha I - \tilde{\mathcal{A}}) \begin{bmatrix} x_{i0} \\ f_{i0}(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_{i0} - Ax_{i0} - Bf_0(-h) \\ \alpha f_0(\cdot) - \frac{df_{i0}}{d\theta}(\cdot) \end{bmatrix}$$

となる。上式より  $f_{i0}(\theta) = e^{\alpha\theta} f_{i0}(0)$  と  $(\alpha I - A)x_{i0} = Be^{-\alpha h} f_{i0}(0)$  を得る。このとき、 $z_0 \in \text{dom}(\tilde{\mathcal{A}})$  なので、 $f_{i0}(0) = F \left( e^{Ah} x_{i0} + \int_0^h e^{A(h-\tau)} Be^{\alpha(\tau-h)} f_{i0}(0) d\tau \right)$  である。積分は

$$\begin{aligned} \int_0^h e^{A(h-\tau)} Be^{\alpha(\tau-h)} f_{i0}(0) d\tau &= e^{Ah} \int_0^h e^{(\alpha I - A)\tau} d\tau Be^{-\alpha h} f_{i0}(0) \\ &= e^{Ah} (e^{(\alpha I - A)h} - I)(\alpha I - A)^{-1}(\alpha I - A)x_{i0} \\ &= (e^{\alpha h} - e^{Ah})x_{i0} \end{aligned}$$

と書けるため  $f_0(0) = Fe^{\alpha h} x_{i0}$ 、したがって  $f_0(\theta) = Fe^{\alpha(h+\theta)} x_{i0}$  となる。これより

$$\alpha x_{i0} - Ax_{i0} - Bf_{i0}(-h) = (\alpha I - A - BF)x_{i0} = 0 \quad (4.41)$$

となるが、いま  $\alpha$  は十分大きく、 $\Delta(\alpha)$  は可逆であるため、 $x_{i0} = 0$  である。また、 $f_{i0}(\cdot) = Fe^{\alpha(h+\cdot)} x_{i0} = 0$  となるため仮定に反する。つまり、 $(\alpha I - \tilde{\mathcal{A}})$  は単射である。よって  $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$  となる。  $\square$

### 4.3 閉ループスペクトルとそのダイナミクスへの影響

ここまでは、十分大きな実数  $\alpha$  に対するレゾルベントにもとづいて考えてきた。ここでは、状態予測制御系の閉ループ極を求めるために、 $\alpha$  を複素数  $\lambda$  に置き換えて複素平面上の  $\mathcal{A}$  のスペクトルについて考察する。

定理 4.5. 作用素  $\mathcal{A}$  のスペクトルは

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(\Delta(\lambda)) = 0\}$$

であり, すべての固有値の重複度は有限である. また,  $\xi$  を  $\mathcal{A}$  の固有値  $\lambda$  に対応する固有ベクトルとすると,  $\xi = \begin{bmatrix} x_0 \\ Fe^{\lambda(h+\cdot)}x_0 \end{bmatrix}$  であり  $\Delta(\lambda)x_0 = 0$  となる.

証明.  $Q_\lambda$  を (4.5) 式の複素空間への拡張, すなわち

$$Q_\lambda \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \phi \\ \psi(\cdot) \end{bmatrix}$$

とする. このとき,  $\det(\lambda I - A - BF) \neq 0$  を満たす  $\lambda \in \mathbb{C}$  に対して,  $Q_\lambda$  は  $\mathcal{H}$  上で有界作用素となる. また, そのような  $\lambda$  について

$$(\lambda I - \mathcal{A})Q_\lambda = I$$

が成り立ち,  $(\lambda I - \mathcal{A})$  は単射である. したがって,  $Q_\lambda$  は  $\mathcal{A}$  のレゾルベントである. また,  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(\lambda I - A - BF) \neq 0\} \subset \rho(\mathcal{A})$  である.

ここで,  $\det(\Delta(\lambda)) = 0$  であり, あるベクトル  $\zeta \in \mathbb{R}^n$  が存在して

$$(\lambda I - A - BF)\zeta = 0 \tag{4.42}$$

を満たすと仮定する.  $\bar{z} \in \mathcal{H}$  を

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} \zeta \\ Fe^{\lambda(h+\cdot)}\zeta \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

とすると, (4.42) 式より

$$\begin{aligned} f(0) &= F \left\{ e^{Ah}\zeta + \int_0^h e^{A(h-\tau)}BF e^{\lambda\tau}\zeta d\tau \right\} \\ &= Fe^{Ah} \left\{ I + \int_0^h e^{(\lambda I - A)\tau}d\tau(\lambda I - A) - \int_0^h e^{(\lambda I - A)\tau}d\tau(\lambda I - A - BF) \right\} \zeta \\ &= Fe^{\lambda h}\zeta \end{aligned}$$

となる. したがって,  $\bar{z} \in \text{dom}(\mathcal{A})$  であり,

$$(\lambda I - \mathcal{A})\bar{z} = \begin{bmatrix} \lambda\zeta - A\zeta - BF\zeta \\ \lambda Fe^{\lambda(h+\theta)}\zeta - \frac{d}{d\theta}Fe^{\lambda(h+\theta)}\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を得る. よって  $\sigma_p(\mathcal{A}) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(\lambda I - A - BF) = 0\}$  である.

いま,  $\xi = \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix}$  を  $\mathcal{A}$  の固有値  $\lambda$  に対応した固有ベクトル, すなわち

$$(\lambda I - \mathcal{A})\xi = \begin{bmatrix} \lambda x_0 - Ax_0 - Bf_0(-h) \\ \lambda f_0(\cdot) - \frac{df_0}{d\theta}(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

を満たすと仮定する. (4.44) 式の第 2 要素より

$$\frac{df_0}{d\theta} = \lambda f_0(\theta) \quad (4.45)$$

であるため,  $f_0(\theta) = e^{\lambda\theta} f_0(0)$  である. したがって  $f_0(-h) = e^{-\lambda h} f_0(0)$  であり, これを (4.44) 式の第 1 要素に代入することで

$$Be^{\lambda h} f_0(0) = (\lambda I - A)x_0 \quad (4.46)$$

を得る. いま,  $\xi \in \text{dom}(\mathcal{A})$  だから

$$\begin{aligned} f_0(0) &= F \left\{ e^{Ah} x_0 + \int_0^h e^{A(h-\tau)} B e^{\lambda(\tau-h)} f_0(0) d\tau \right\} \\ &= F e^{Ah} \left\{ x_0 + \int_0^h e^{(\lambda I - A)\tau} d\tau B e^{-\lambda h} f_0(0) \right\} \\ &= F e^{\lambda h} x_0 \end{aligned}$$

よって  $f_0(\theta) = F e^{\lambda(\theta+h)} x_0$  である. これより,

$$Ax_0 + BFx_0 = \lambda x_0 \quad (4.47)$$

であるから,  $\Delta(\lambda)x_0 = 0$  となる.

次に固有値の重複度について考える. 十分大きい  $\alpha$  についてレゾルベントは補題 4.3 より

$$\begin{aligned} &(\alpha I - \mathcal{A})^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \int_0^h e^{-\alpha\eta} x(\eta) d\eta + e^{-\alpha h} [\Delta(\alpha)]^{-1} \bar{x}(h) \\ e^{\alpha\theta} F [\Delta(\alpha)]^{-1} \bar{x}(h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\int_0^\theta e^{\alpha(\theta-\eta)} f_0(\eta) d\eta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.48)$$

である. これよりレゾルベントは値域の次元が有限の作用素とボルテラ型積分作用素の和で表わされることがわかる.  $L_2[-h, 0)$  上のボルテラ作用素はコンパクトであるから [44], レゾルベント作用素はコンパクトとなる. また, 定理 2.12 より,  $(\alpha I - \mathcal{A})^{-1}$  は有界作用素であるため閉作用素である. したがって  $(\alpha I - \mathcal{A})$  も閉となるから,  $\mathcal{A}$  は閉作用素である. つまり  $\mathcal{A}$  は閉作用素かつコンパクトなレゾルベントをもつため, そのスペクトルは孤立した固有値からなり, 重複度は有限である (定理 2.15).  $\square$

以上の解析においては有限の複素領域に存在する閉ループ極を示している．無限遠点の極については以下のように考えることができる．

**定理 4.6.** 拡張複素平面における  $\mathcal{A}_i$  のスペクトルは

$$\hat{\sigma}(\mathcal{A}_i) = \sigma_p(\mathcal{A}_i) \cup \left\{ \lambda \in \hat{\mathbb{C}} \mid \operatorname{Re}[\lambda] = -\infty \right\} \quad (4.49)$$

で構成される．

証明. 定理 4.5 より  $\sigma(\mathcal{A}_i) = \sigma_p(\mathcal{A}_i) \subset \hat{\sigma}(\mathcal{A}_i)$  である．また明らかに  $\mathcal{A}_i$  は  $\mathcal{H}$  上の非有界作用素であるから，定理 2.16 より  $\lambda = \infty$  は  $(\lambda I - \mathcal{A}_i)^{-1}$  の真性特異点となる．いま，(4.48) 式よりレゾルベントは無限遠点に対する極限のうち  $\lim_{\operatorname{Re}[\lambda] \rightarrow -\infty} (\lambda I - \mathcal{A}_i)^{-1}$  の場合に非有界となることが簡単にわかる．したがって， $\left\{ \lambda \in \hat{\mathbb{C}} \mid \operatorname{Re}[\lambda] = -\infty \right\} \subset \hat{\sigma}(\mathcal{A}_i)$  より題意を得る．  $\square$

したがって，連続時間状態予測制御系の閉ループ極は指定極  $\sigma(A + BF)$  以外も（拡張複素空間上で）存在することを示した．本節の最後に無限遠点の極がどのように閉ループダイナミクスに影響するのか考察する．定理 4.3 の証明より次の系を得る．

**系 4.7.** いま， $\bar{x}(0) = x(0)$ ，

$$\bar{x}(t) = e^{At} \bar{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau - h) d\tau, \quad (4.50)$$

$t \in [0, h)$  とする．このとき，初期条件を考慮した  $x(t)$  のラプラス変換  $x(s)$  は

$$x(s) = \int_0^h \bar{x}(t) e^{-st} dt + e^{-sh} (sI - A - BF)^{-1} \bar{x}(h) \quad (4.51)$$

となる．

これより，初期条件の応答に関する有限ラプラス変換の項とむだ時間要素のかかった閉ループ伝達関数の和となることがわかる．これより，無限遠点の極は状態予測制御系が有限次元系と同様に振る舞うまでの遅れに対応していることが確認できる．

また，初期条件を考慮した  $Z$  変換により，系 4.7 の離散時間系に対する定理を得る．

**定理 4.8.** いま， $\bar{x}_d(0) = x_d(0)$ ，

$$\bar{x}_d(k+1) = A_d \bar{x}_d(k) + B_d u_d(k-D), \quad k = 0, \dots, D-1 \quad (4.52)$$

とする。このとき,  $x(z)$  は

$$x(z) = \sum_{i=0}^{D-1} \bar{x}_i z^{-i} + z^{-D} (zI - A_d - B_d F_d)^{-1} \bar{x}_d(D) z. \quad (4.53)$$

となる。

したがって離散系のダイナミクスは有限インパルス応答 (FIR) 部分とむだ時間要素かかった無限インパルス応答 (IIR) 部分の和で構成されることがわかる。FIR 部分は初期条件に関する応答の有限  $Z$  変換であり, IIR 部分は閉ループ系としての応答を表している。また, IIR 部分にむだ時間要素がかかっていることから, むだ時間長に対応した極を原点にもつことがわかる

## 4.4 数値例

前節のスペクトル解析の結果を数値的に検証することを考える。状態予測制御系は分布遅れをもつ中立型むだ時間系となることから [12], 前章のモノドロミ作用素に基づく方法を適用することは困難である。したがって, ここでは Solution Operator (SO) アプローチによって  $\mathcal{A}$  のスペクトルを数値計算することを考える。

### 4.4.1 状態予測制御系に対する SO アプローチ

いま, 閉ループ系の時刻  $h' := h/N$  における解は式 (4.3) より,

$$\mathcal{T}(h') \begin{bmatrix} x_0 \\ f_0(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(h') \\ u(h' + \cdot) \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

で表される。このとき, 空間  $L_2([-h, 0]; \mathbb{R}^{m_u})$  を  $\mathbb{R}^{m_u N}$  で近似, すなわち  $f_i := f(-ih')$ ,  $i = 1, \dots, N$  としたときの  $\mathcal{T}(h')$  の行列近似表現をもとめる。

零次ホールドを仮定し,  $A'_d := e^{Ah'}$ ,  $B'_d := \int_0^{h'} e^{A(h'-\tau)} B d\tau$  とすると, 入力むだ時間系 (4.1) の解は

$$\begin{aligned} x_{h'} &:= x(h') = e^{Ah'} x(0) + \int_0^{h'} e^{A(h'-\tau)} B f(\tau - h) d\tau \\ &\approx A'_d x(0) + B'_d f_N \end{aligned} \quad (4.55)$$



となる．また，制御入力は

$$\begin{aligned} u_1 &:= u(0) = Fe^{Ah}x(0) + F \int_0^h e^{A(h-\tau)} B f(\tau - h) d\tau \\ &\approx F(A'_d)^N x(0) + F \sum_{i=1}^N (A'_d)^{(N-i)} B'_d f_{N-i+1} \end{aligned} \quad (4.56)$$

と，

$$u_j = f_{j-1}, \quad (j = 2, \dots, N) \quad (4.57)$$

で構成される．これらをまとめて，

$$\begin{bmatrix} x_{h'} \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = T_N \begin{bmatrix} x_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

とするとき， $T_N$  は  $n_x + m_u N$  次の正方行列であり，

$$T_N = \begin{bmatrix} A'_d & 0 & 0 & \cdots & 0 & B'_d \\ F(A'_d)^N & FB'_d & FA'_d B'_d & \cdots & \cdots & F(A'_d)^{(N-1)} B'_d \\ 0 & I & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & I & 0 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

で表される．この行列  $T_N$  の固有値により，解作用素  $\mathcal{T}$  のスペクトルの近似値を計算できる．

スペクトル写像定理 [56] より， $T_N$  の固有値を  $\beta$  とすると， $\mathcal{A}$  の固有値  $\lambda^*$  の近似値  $\lambda$  は

$$\lambda^* \approx \lambda = \frac{1}{h} \ln \beta \quad (4.60)$$

で計算できる．

#### 4.4.2 計算結果

前節の SO アプローチを用いて閉ループ系のスペクトル分布を確かめる．次の連続時間で不安定なスカラシステムについて考える．

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t - h), \quad (4.61)$$

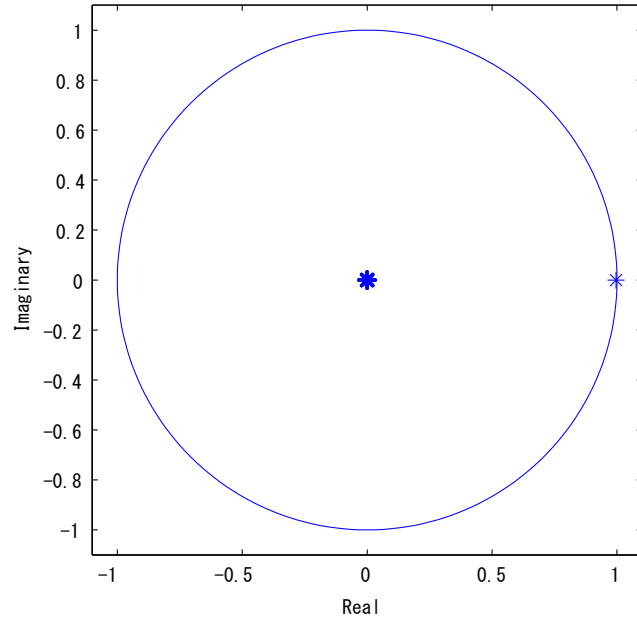
ただし，むだ時間長は  $h = 0.1$  とする．フィードバックゲイン  $F$  は  $-3$  とし，状態予測制御による閉ループ極は  $-2$  に設定する．ここでは，解作用素  $\mathcal{T}$  を  $N = 49$  として上記の近似法

を用いる。また、ここでは計算精度が重要であるため 3 章と同じく VPA を用い、有効桁数は 100 とした。

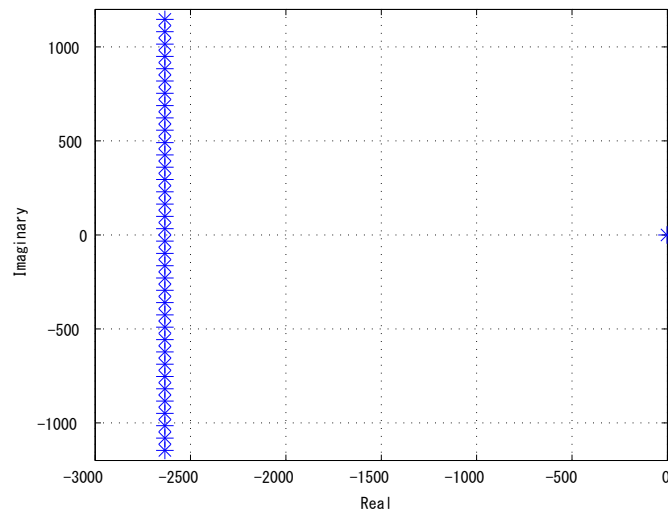
Fig. 4.1(a) より、固有値は単位円近くに 1 つあり、その他は原点付近に集まっていることが確認できる。前者が状態予測制御によって任意に配置した極、後者が自動的に配置される極に対応している。したがって、Fig. 4.1(b) では、 $A$  の固有値の近似値は状態予測制御によって指定した  $-2$  と残りは実部が  $-2600$  付近に分布することが見て取れる。このとき、自動的に配置される極は有限領域に存在しているが、指定極と比べて複素平面の十分左側に分布するためむだ時間経過後のダイナミクスにはほとんど影響しないと考えられる。また、有効桁数と区間分割数  $N$  を増やすことで  $-\infty$  方向に近づけることができる。

## 4.5 本章のまとめ

本章では、連続時間における状態予測制御系の状態空間表現である抽象的微分方程式表現を導出した。また、そのスペクトルを求め、無限遠点に  $A + BF$  の固有値以外のスペクトルの要素が存在することを明示した。指定極以外のスペクトル要素が閉ループ動特性にどう影響を与えるかについても検討し、時間遅れに対応していることを示した。そして、閉ループ系のスペクトル分布を数値例によって確認した。



(a)  $T_N$  の固有値



(b)  $\mathcal{A}$  の固有値の近似値

Fig. 4.1: 閉ループ系の固有値分布

## 第 5 章

# 連続時間入力むだ時間系に対する拡張状態予測制御

1.3 節で述べたように、離散時間入力むだ時間系 (1.19) に対しては極配置の自由度を増した拡張手法が提案されている。そのゲインは式 (1.25) で与えられており、遅延ステップ数  $D = 1$  とすれば、このときの制御則は次のように変形できる\*<sup>1</sup>。

$$\begin{aligned} u_d(k) &= (F_d A_d - M_0 F) x_d(k) + (F_d B_d + M_0) u_d(k-1) \\ &= F_d x_d(k+1) + M_0 \{u_d(k-1) - F_d x_d(k)\}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

上式の第 1 項は通常の状態予測制御である。第 2 項は 1 ステップ前の制御入力と現在の状態から推定できる実際の入力の誤差を評価している。したがって、制御則 (5.1) は状態の予測値と実際の応答の誤差を反映する構造を有すると解釈できる。

しかしながら、この自由度が閉ループ特性に対してどのように影響するのかは検討されておらず、連続時間系に対しての拡張法も提案されていない。そこで本章では、離散時間の場合のアナロジーに基づき、連続時間における拡張状態予測制御則の導出をおこない、そのロバスト性について検証する。

本章の構成は次の通りである。第 1 節で、提案法である連続時間拡張状態予測制御を導出し、その閉ループ極について解析する。次いで第 2 節ではむだ時間長にミスマッチがあった場合のロバスト安定解析法について述べる。そして第 3 節にて、数値計算により提案法を用いた場合の閉ループ極を確かめるとともに、ロバスト安定性について検討する。第 4 節にて本章をまとめる。

---

\*<sup>1</sup>  $D > 1$  に対する拡張も容易であるが、ここでは省略する。

## 5.1 $A + BF$ の固有値以外の閉ループ極配置法

本節では、離散時間系に対する制御則 (5.1) の連続時間系に対応するものを導出する。次の連続時間入力むだ時間系について考える。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - h), h \in \mathbb{R}_+ \quad (5.2)$$

ただし,  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $u \in \mathbb{R}^{m_u}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n_x \times m_u}$  and であり, 初期条件は

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \\ u(\theta) &= \phi(\theta), \theta \in [-h, 0), \phi \in L_2([-h, 0); \mathbb{R}^{m_u}). \end{aligned}$$

とする。また対  $(A, B)$  は可制御であり,  $A + BF$  が Hurwitz となる安定化ゲイン  $F$  が存在する。ここで, 式 (5.1) に対するアナロジーに基づき連続時間制御則

$$\begin{aligned} u(t) &= F\hat{x}(t + h) + \tilde{M}(u(t - h) - Fx(t)) \\ &= (Fe^{Ah} - \tilde{M}F)x(t) + F \int_{t-h}^t e^{A(t-\eta)} Bu(\eta) d\eta + \tilde{M}u(t - h), \end{aligned} \quad (5.3)$$

について考える。ここで,  $\tilde{M} \in \mathbb{R}^{m_u \times m_u}$  は新たな設計の自由度である。このとき, 制御則 (5.3) において  $\tilde{M} = 0$  とすると通常の状態予測制御になることに注意されたい。次の定理に示すように, この制御則は  $-\infty$  に存在する極 (の一部分) を有限の領域に移動させることができる。

**定理 5.1.** 式 (5.2), (5.3) により構成される系の閉ループ極は以下の特性超越方程式の根によって与えられる。

$$|sI - A - BF||I - \tilde{M}e^{-hs}| = 0. \quad (5.4)$$

証明. 閉ループ系式 (5.2), (5.3) を初期値が零の仮定のもとでラプラス変換すると,

$$(sI - A)X(s) - e^{-sh}BU(s) = 0, \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} &- (Fe^{Ah} - \tilde{M}F)X(s) \\ &+ (I - FN(s)B - e^{-sh}\tilde{M})U(s) = 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

を得る。ただし,  $N(s) = \int_0^h e^{(A-sI)t} dt$  であり

$$N(s)(sI - A) = I - e^{Ah}e^{-sh}. \quad (5.7)$$

となることに注意されたい. このとき,

$$\Phi(s) := \begin{bmatrix} sI - A & -e^{-sh}B \\ -(Fe^{Ah} - \tilde{M}F) & I - FN(s)B - e^{-sh}\tilde{M} \end{bmatrix}.$$

とすると, 式 (5.5), (5.6) は

$$\Phi(s) \begin{bmatrix} X(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

とまとめることができる. 閉ループ極は  $|\Phi(s)| = 0$  を満たす  $s$  である.  $\Phi(s)$  の左, 右からそれぞれ正則な行列

$$T_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -e^{sh}FN(s) & I \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ Fe^{sh} & I \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

をかけることにより,

$$T_1\Phi(s)T_2 = \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & -e^{-sh}B \\ 0 & I - e^{-sh}\tilde{M} \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

を得る. ただし,  $\tilde{A} := A + BF$  である. したがって, 式 (5.10) より式 (5.4) を得る.  $\square$

式 (5.4) より,  $A + BF$  の固有値以外の閉ループ極は  $|I - e^{-sh}\tilde{M}| = e^{-sh}|e^{sh}I - \tilde{M}| = 0$  の根によって与えられる.  $\tilde{M}$  の固有値を  $\mu \in \mathbb{C}$  とすると,

$$s = \frac{1}{h} \ln \mu = \frac{1}{h} \{ \ln |\mu| + (\arg \mu + 2\ell\pi)j \}, \quad (5.11)$$

( $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) となり, 式 (5.4) を満たすことがわかる. したがって, 制御則 (5.3) によって虚軸に平行な無限個の極を配置できたことがわかる. これより, 明らかに閉ループ系が安定であるための必要十分条件は  $A + BF$  が Hurwitz, かつ  $\tilde{M}$  が Schur となることである.

$D = 1$  に対応する離散時間系に対する制御則 (5.1) は  $M_0$  の固有値により原点極を動かすことができる. このとき,  $M_0$  については (閉ループ系が安定となるために Schur であること以外は) 制限がなく, 任意に極配置をおこなうことができる. これとは異なり, 連続時間の場合は  $-\infty$  に閉ループ極が残り続け [55], さらに新たに配置した極も完全に自由に配置することはできない. しかしながら, この新たな設計の自由度は状態予測制御の性能を向上させることが可能である. そこで, 次節では制御則 (5.3) を用いたときのロバスト性について述べる.

## 5.2 むだ時間長のミスマッチに対するロバスト安定性

上でも述べたとおり, ここでは閉ループ系 (5.2), (5.3) のロバスト安定性について述べる. とくに, 参考文献 [34, 35] に基づき, 時間遅れ長  $h$  の摂動に対するロバスト性について論ずる. ここでは  $A + BF$  は Hurwitz,  $\tilde{M}$  は Schur であると仮定し, 次の摂動  $\delta \in \mathbb{R}$  を含む制御対象について考える.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - h - \delta). \quad (5.12)$$

また簡単化のために, 単入力系, すなわち  $B \in \mathbb{R}^{n_x \times 1}$  とする. 定理 5.1 の証明と同様の手順で閉ループ安定性について特徴づけると,

$$|\hat{\Phi}(s)| = 0, \quad (5.13)$$

となる. ただし,

$$\hat{\Phi}(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -e^{-s(h+\delta)}B \\ -(Fe^{Ah} - \tilde{M}F) & 1 - FN(s)B - e^{-sh}\tilde{M} \end{bmatrix}.$$

である. また, 正則行列を用いて

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -e^{s(h+\delta)}FN(s) & 1 \end{bmatrix} \hat{\Phi}(s) \begin{bmatrix} I & 0 \\ Fe^{s(h+\delta)} & 1 \end{bmatrix}$$

なる変換を施すと,

$$P(s) = (e^{-sh}\tilde{M} - 1)^{-1}(Fe^{Ah} - \tilde{M}F)(sI - \tilde{A})^{-1}Be^{-sh}, \quad (5.14)$$

$$Q(s) = e^{-s\delta} - 1. \quad (5.15)$$

として, 式 (5.13) は

$$|sI - \tilde{A}||1 - e^{-sh}\tilde{M}||1 + P(s)Q(s)| = 0 \quad (5.16)$$

と整理することができる. 仮定より, 閉ループ系のロバスト安定性は

$$1 + P(s)Q(s) = 0. \quad (5.17)$$

の根に依存する. この安定解析には, ナイキストの定理を用いる.  $P(s)Q(s)$  は無限遠点に真性特異点をもつことからナイキストの定理を用いるためにはナイキスト経路上での

$P(s)Q(s)$  の挙動に注意する必要がある。いま、 $P(s)$  は安定な伝達関数にむだ時間要素を掛けたもの、 $Q(s)$  は指数関数であることから半径無限のナイキスト経路の半円上では  $P(s)Q(s) \rightarrow 0$  となる [34]。  $P(s)$ 、 $Q(s)$  はどちらも安定であるから、開ループ伝達関数  $P(s)Q(s)$  に対する直結フィードバック系が安定であるための必要十分条件はナイキスト軌跡が  $-1 + j0$  を回らないことである。

閉ループ系が安定限界、すなわち

$$1 + P(j\omega)Q(j\omega) = 0, \quad (5.18)$$

を満たす  $\omega \in \mathbb{R}$  について考える。  $Q(j\omega)$  について着目すると、

$$-1/Q(j\omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega\delta}} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \cot\left(\frac{\omega\delta}{2}\right),$$

と表すことができ、  $-1/Q(j\omega)$  の軌跡は実部が  $1/2$  の虚軸に平行な直線上を動くことがわかる。したがって、  $P(j\omega)$  がこの直線と交差することがなければ、式 (5.18) を満たす  $\omega$  は存在しない。これはむだ時間長に対する摂動  $\delta$  に依存せず系が安定となることを意味する。次に  $P(j\omega)$  が直線と交差する、つまり系が不安定となる  $\delta$  が存在する場合について検討する。  $\omega \in [0, \infty)$  としたとき、ある 1 点でのみ 2 つの軌跡が交差したとする。その交点における角周波数を  $\omega_1$  とし、次の方程式について考えよう。

$$-\frac{1}{2} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \text{Im}[P(j\omega_1)]. \quad (5.19)$$

三角関数  $\cot(\alpha/2)$  は区間  $(0, 2\pi)$  では単調かつ連続、かつ周期  $2\pi$  の周期関数であり、その値域は  $(-\infty, \infty)$  をとる。そのため、式 (5.19) を満たす  $\alpha$  は無限個存在する。ここで、式 (5.19) の解のうち、もっとも絶対値の小さい正と負の  $\alpha$  をそれぞれ  $\bar{\alpha}_1$  と  $\underline{\alpha}_1$  とする。このとき、

$$\bar{\delta} = \bar{\alpha}_1/\omega_1, \quad \underline{\delta} = \max(-h, \underline{\alpha}_1/\omega_1),$$

とすると、むだ時間のミスマッチ  $\delta \in (\underline{\delta}, \bar{\delta})$  に対して、すべての  $\omega \in \mathbb{R}$  は式 (5.18) を満たさないため、閉ループ系は安定である。複数交点が存在する場合に関しては文献 [34] を参考にされたい。



## 5.3 数値例

### 5.3.1 スペクトル計算

まず, 状態予測制御と提案法の極配置結果を数値計算により確認しよう. ここでは 4 章と同様の不安定なスカラーシステムについて考えよう.

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t-h), \quad (5.20)$$

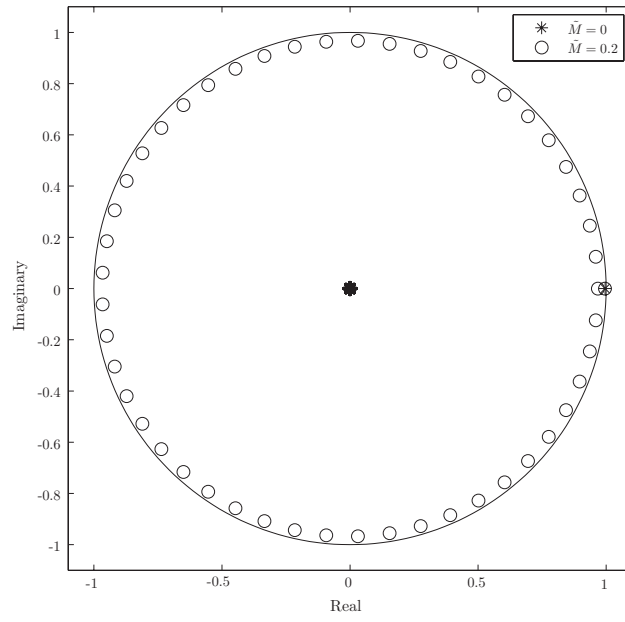
ただし, むだ時間長は  $h = 0.1$  とする. フィードバックゲイン  $F$  は  $-3$  とし, 状態予測制御による閉ループ極は  $-2$  に設定する. 通常の状態予測制御と提案法に対応する  $\tilde{M} = 0$ ,  $\tilde{M} = 0.2$  の場合について検討する. 閉ループ系の無限小生成作用素  $\mathcal{A}$  のスペクトルを計算するために, 前章で導出した SO アプローチを用いる. 連続時間のむだ時間バッファを離散化することにより, 解作用素  $\mathcal{T}(t)$  を行列  $T_N \in \mathbb{R}^{50 \times 50}$  に近似する. 数値計算には 3 章と同じく VPA を用い, 有効桁数は 100 とした. また, 無限小生成作用素  $\mathcal{A}$  と強連続半群  $\mathcal{T}(t)$  のスペクトルの関係は

$$\sigma(\mathcal{T}(t)) \setminus \{0\} = \{e^{t\lambda} \mid \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}, \quad t \geq 0.$$

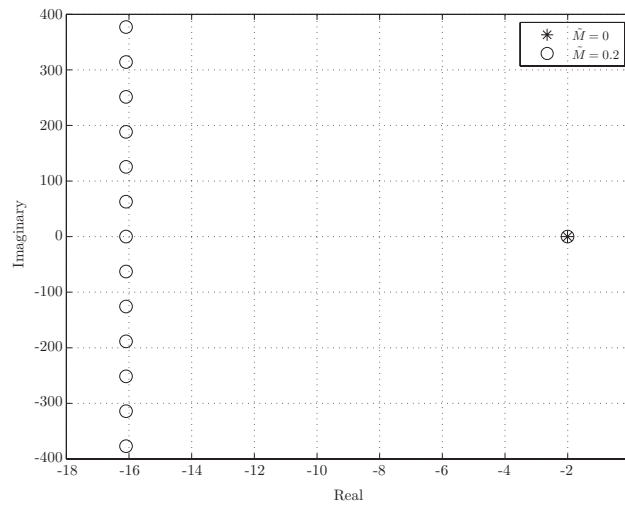
によって特徴づけられる [56]. Fig. 5.1 の (a) と (b) はそれぞれ解  $\mathcal{T}(t)$  と無限小生成作用素  $\mathcal{A}$  の近似固有値を示している.  $\tilde{M} = 0$  のとき,  $\mathcal{T}(t)$  のひとつの固有値が  $1 + j0$  の近くにあり, それ以外は原点付近に密集していることがわかる. 前者は  $A + BF \in \sigma(\mathcal{A})$  に, 後者は  $-\infty$  に分布する極 (Fig. 5.1 (b) の範囲の外) にそれぞれ対応している [55].  $\tilde{M} = 0.2$  の場合については, 単位円の内側に円状の新たな  $\mathcal{T}(t)$  の固有値が現れている. これは式 (5.11) より,  $\mathcal{A}$  の固有値  $-16.09 + 20\ell\pi j$ ,  $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  に対応している. どちらの場合も, 設計通りに閉ループ極  $-2$  をもつことが確認できる.

### 5.3.2 ロバスト安定性

次に, Fig. 5.2 に示す台車型倒立振子系について考える. ただし,  $x$  は台車位置,  $\theta$  は振子の鉛直方向からの傾き角度を表す. 台車は速度フィードバックが施された DC モータにより駆動され, 制御入力  $u$  は目標角速度で与えられる. この入力を実際に系に印加されるまで時間遅れが存在する状況下で, 不安定平衡点での安定化を考える. この条件に対応した倒立振



(a) 解作用素



(b) 無限小生成作用素

Fig. 5.1: 固有値の分布

子系の平衡点付近での線形状態空間モデルは

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + Bu(t-h), \quad (5.21)$$

となる。ただし,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix},$$

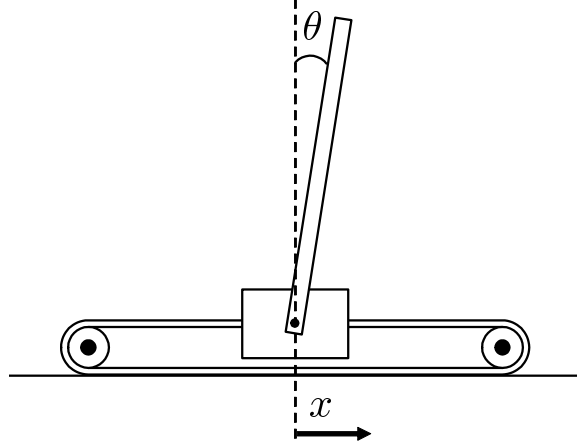


Fig. 5.2: 倒立振子モデル

$$(a_{33}, a_{42}, a_{43}, a_{44}) = (-250.1, 36.77, 937.8, 0.035),$$

$$(b_3, b_4) = (99.49, -373.1), h = 0.05.$$

である．状態予測制御におけるフィードバックゲイン  $F$  は LQ により設計をおこない，その重み係数は以下のように与える．

$$Q = I_4, R = 10.$$

以上の条件で， $\tilde{M} = 0$ ， $-0.5$  について時間遅れ長ミスマッチに対するロバスト安定余有を見積もる．両ケースに対する  $P(j\omega)$  のナイキスト軌跡を Fig. 5.3 に示す．これより， $\omega \in [0, \infty)$  で  $\text{Re}[s]=1/2$  との交点をひとつもつことがわかる．前節のロバスト安定解析法より，ミスマッチの余有は次のようになる．

$$-0.050 < \delta < 0.078, (\tilde{M} = 0),$$

$$-0.050 < \delta < 0.081, (\tilde{M} = -0.5).$$

したがって非零の  $\tilde{M}$ ，すなわち提案法によってロバスト性が向上したことがわかる．Fig. 5.4 にミスマッチ  $\delta = 0.07$ ，初期条件  $x(0) = [0 \ \pi/180 \ 0 \ 0]^T$  としたときの  $\theta$  の時間応答を示す． $\tilde{M} = 0$  の応答は  $\tilde{M} = -0.5$  に比べて振動的であり，より安定限界に近いことを意味する．したがって，提案法である拡張状態予測制御により追加された自由度によって系のロバスト安定性が改善されたといえる．

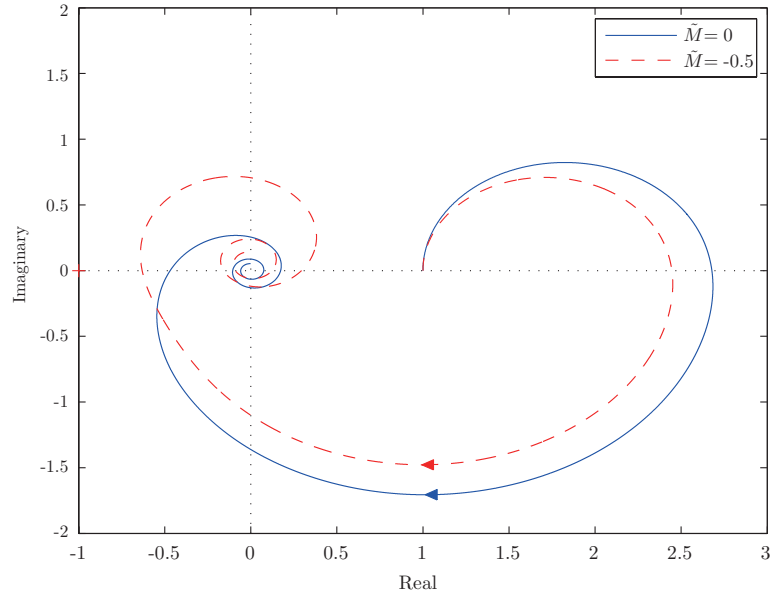


Fig. 5.3: ナイキスト軌跡  $P(j\omega)$

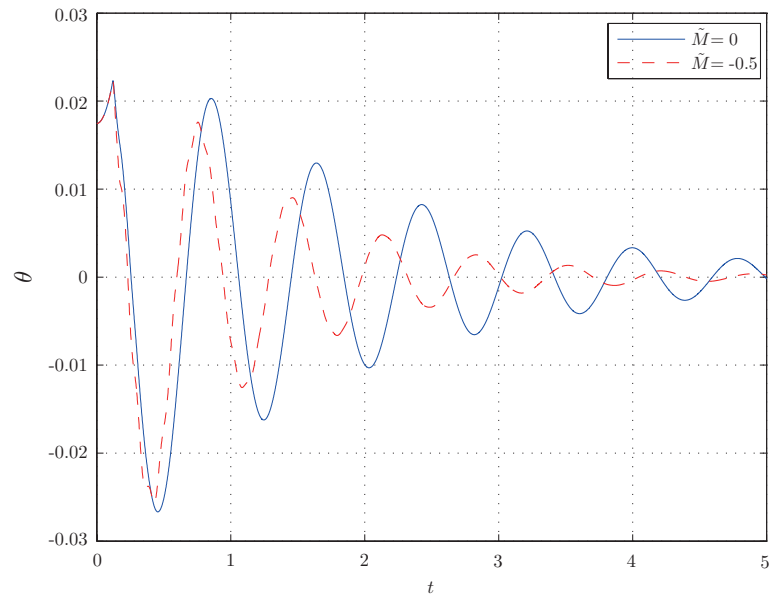


Fig. 5.4: 時間応答  $\theta$

## 5.4 本章のまとめ

本節では、連続時間の入力むだ時間系に対する拡張状態予測制御を導出した。離散時間の場合のアナロジーより、この制御則は  $A + BF$  に対する極配置を保ったまま、 $-\infty$  に存在する閉ループ極の一部を虚軸に平行な直線上に動かすことができる。その極配置結果は、数値

例によって確かめられた．また，倒立振子系を例に，むだ時間長のミスマッチに対してよりロバストとなるよう，提案法で新たに導入した自由度を活用できることを示した．

## 第 6 章

# おわりに

本論文では、無限次元システム表現に基づいたむだ時間系に対するスペクトル解析および制御則の拡張について考えた。まず、遅れ型むだ時間系に対して検討し、そのシステム表現の 1 つであるモノドロミ作用素の近似法について、従来法を含む一般的な高次ホールド近似を用いた方法を提案した。具体的には、摂動論に基づき、高次ホールド近似を用いた場合の近似手続きの数学的な妥当性を示した。その後、スペクトルを近似計算するための近似行列表現の一般形を導出した。また、従来よりも高い次数の近似を用いることにより、モノドロミ作用素のスペクトルの近似計算を高精度化かつ高速化できる場合があることを示した。

次いで、入力むだ時間系に対し状態予測制御を適用した際の閉ループ系について抽象的な微分方程式表現を陽に導出した。この表現に基づいて、指定極以外は  $-\infty$  に分布することを明示し、数値例により確かめた。また閉ループダイナミクスについて考察し、 $-\infty$  の極は閉ループ系が有限次元系のように振る舞うまでの遅れに対応して存在していることを示した。

さらに、離散時間状態予測制御の拡張法のアナロジーにより、連続時間において  $-\infty$  の極を（虚軸に平行な無限極といった制約があるものの）有限の複素領域に配置する、拡張状態予測制御法を提案した。数値例により、提案法で新たに導入した自由度を活用することで従来の状態予測制御と比べ、むだ時間長のミスマッチに対してロバストになる場合があることを示した。

しかし、本論文の残す課題は多い。モノドロミ作用素表現については、遅れ型のみならず中立型の場合や commensurate delays の場合にも対応しているが、それらに対応する数値計算法は未だ検討されていない。とくに中立型の場合は、モノドロミ作用素がコンパクトにならないため、その近似手続きの妥当性を示すことは難しいためである。より広いクラスのむ

だ時間系に対してモノドロミ作用素アプローチを拡張することが今後の課題の1つである。

また、上記の理由によって本論文 4, 5 章における状態予測制御系のスペクトル計算ではモノドロミ作用素に基づく方法ではなく SO アプローチを用いた。厳密には拡張状態予測制御は  $-\infty$  の極の一部を有限領域に配置しているものと思われるが、数値例ではすべての極が有限領域に移動している。これには、4 章で導出した状態予測制御に対する SO アプローチの近似の妥当性について検討が充分でないことが関係していると考えられ、より精密にその近似手続きを検討する必要がある。

拡張状態予測制御については、数値例に基づきむだ時間ミスマッチに対してロバストになる場合があることを示したが、その具体的な設計方針について議論する必要がある。また、本論文では離散時間の 1 ステップ遅れの離散時間の拡張状態予測制御のアナロジーにより、それに対応する連続時間の制御則を導出したが、もちろん 2 ステップ以上の遅れに対応する制御則の導出も可能である。しかしながら、追加した自由度により配置される極の条件が非常に複雑になり、それに伴い設計やロバスト性の解析も困難となる。そのような極配置が閉ループ系に対してどのような利点を与えるかを明らかにすることが課題である。

さらに、本研究の大きな今後の展望は無限次元系に対して、よりよい有限次元近似法を検討することである。一般に、偏微分方程式の時間発展を数値計算する場合には、空間分解能と時間分解能には相関があり、そのバランスが計算の精度や安定性に影響する。3 章ではモノドロミ作用素について、高次導関数を考慮して近似することで同一の時間分割数に対して劇的にその近似精度が向上することを示した。この結果は、無限次元系を有限次元近似する際に空間方向の基底を選び方を工夫することで、時間方向の近似を荒くできることを意味している。このような知見は、例えば次のように応用できると思われる。近年、熱間圧延鋼板における冷却プロセスへのモデル予測制御の適用が検討されている。多くの場合、鋼板の熱伝導モデルは差分近似により格子状に離散化されるが、よりよい制御性能を達成するためにはモデルの高次元化が避けられず、サンプル時間内に制御入力を計算することが困難となる。これに対して、鋼板の温度分布をうまく特徴づける基底が見つければ、それにより近似モデルの低次元化やサンプル時間を長く取ることが期待できる。

# 謝辞

本研究を進めるにあたり、直接の御指導頂きました岡山大学大学院自然科学研究科知能機械制御学研究室の平田健太郎教授に厚く御礼申し上げます。平田教授ご自身の研究テーマと非常に近いところで研究させていただき、制御理論の奥深さを御指導御鞭撻を賜りました。ときに自らの未熟さに打ちひしがれることもありましたが、私が博士課程を乗り越えることができたのは先生の暖かい御指導のおかげです。重ねて感謝申し上げます。

また、副査を引き受けて頂きました岡山大学大学院自然科学研究科メカトロニクスシステム学研究室 渡辺桂吾教授、適応学習システム制御学研究室 見浪護教授に厚く御礼申し上げます。

京都大学大学院工学研究科自動制御工学分野 萩原朋道教授には、本研究の大部分において共同研究者となって頂き、多くの御指導、御指摘を賜りました。心より感謝申し上げます。

在籍中に暖かい御指導を頂き、岡山大学への転学を快くお許しくださった奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科知能システム制御研究室の杉本謙二教授に謝意を表します。

川崎医療短期大学 放射線技術科 矢納陽准教授 (適応学習システム制御学研究室 元助教) には耐火れんがのパラメータ推定に関する研究の RA に雇用していただき、多くの貴重な経験を積ませて頂いたことに御礼申し上げます。

知能機械制御学研究室 中村幸紀講師には研究のみならず、就職活動など様々な場面で御指導いただきました。同研究室 岡野訓尚助教の研究の進め方や熱意は私の手本となっております。両先生方に御礼申し上げます。また、事務手続きをはじめ、多くのご支援を承りました技術職員の田原吉則様に深く感謝致します。

リコー株式会社の醒井雅裕様をはじめ、河崎明博様、河原崎康晴様、足立知哉様にはレーザープリンタに関する共同研究において大変お世話になり、企業での研究開発について勉強させていただきました。深く感謝致します。

知能機械制御学研究室と奈良先端大知能システム制御研究室の諸先輩方や、同期生、後輩の皆様には様々な場面で励ましの言葉を頂きました。ありがとうございました。

最後に、長きに渡る大学院生活を、自分の思うようにやれ、と暖かく見守り辛抱強く支援してくれた家族に深く感謝します。



# 参考文献

- [1] J. K. Hale and S. M. V. Lunel: *Introduction to Functional Differential Equations*; Springer Science & Business Media, 1993
- [2] J.-P. Richard: Time-delay systems: An overview of some recent advances and open problems; *Automatica*, Vol. 39, No. 10, pp. 1667-1694, 2003
- [3] H. Kokame, K. Hirata, K. Konishi and T. Mori: State difference feedback for stabilizing uncertain steady states of nonlinear systems; *Int. J. Contr.*, Vol. 74, pp. 537-546, 2006
- [4] 中野, 井上, 山本, 原: 繰り返し制御; 計測自動制御学会, 1989
- [5] S. I. Niculescu, E. I. Verriest, L. Dugard and J. M. Dion: Stability and robust stability of time-delay systems: A guided tour; *Lecture notes in control and information sciences*, Vol. 228, pp. 1-71, Springer, 1998
- [6] 阿部, 児島: むだ時間・分布定数系の制御; コロナ社, 2007
- [7] R. F. Curtain and H. J. Zwart: *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*; Springer-Verlag, 1995
- [8] 渡部: むだ時間システムの制御; コロナ社, 1993
- [9] R. Bellman and K. L. Cook: *Differential-Difference Equations*; Academic Press, 1963
- [10] S. Hara, Y. Yamamoto, T. Omata and M. Nakano: Repetitive control system: A new type servo system for periodic exogenous signals; *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, Vol. 33, No. 7, pp. 659-668, 1988
- [11] L. Berezansky, E. Braverman and S. Pinelas: On nonoscillation of mixed advanced-delay differential equations with positive and negative coefficients; *Comput. Math. Appl.*, Vol. 58, Issue 4, pp. 766-775, 2009

- [12] W. Michiels and S.-I. Niculescu: *Stability and Stabilization of Time-Delay Systems: An Eigenvalue-Based Approach*; Society of Industrial and Applied Mathematics, 2007
- [13] K. Gu and S.-I. Niculescu: Survey on recent result in the stability and control of time-delay systems; *J. dyn. Sys., Meas., Control*, Vol. 125, No. 2, pp. 158-165, 2003
- [14] D. Salamon: On controllability and observability of time-delay systems; *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-29, pp. 432-439, 1984
- [15] K. Hirata and H. Kokame: Stability analysis of retarded systems via lifting technique; *Proc. of the 42nd IEEE CDC*, pp. 5595-5596, 2003
- [16] A. S. Morse: Ring model for delay-differential systems; *Automatica*, Vol. 12, No. 5, pp 529-531, 1976
- [17] T. Mori: On an estimate of the decay rate for stable linear delay systems; *Int. J. Contr.*, Vol. 36, No. 1, pp. 95-97, 1982
- [18] T. Mori and H. Kokame: Stability of  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau)$ ; *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, AC-34, pp. 460-462, 1989
- [19] S. I. Niculescu: Stability and hyperbolicity of linear systems with delayed state: A matrix pencil approach; *IMA J. of Math. Control and Information*, Vol. 15, pp. 331-347, 1997
- [20] K. Gu, V. L. Kharitonov and J. Chen: *Stability of Time-Delay System*; Birkhäuser, 2003
- [21] A. Papachristodoulou, M. Peet and S. Lall: Constructing Lyapunov-Krasovskii functionals for linear time delay systems; *Proc. of the 2005 ACC*, pp. 2845-2850, 2005
- [22] K. Engelborghs, T. Luzyanina and D. Roose: Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL; *ACM Trans. on Math. Softw.*, Vol. 28, No. 1, pp. 1-21, 2002
- [23] S. Maset: Numerical solution of retarded functional differential equations as abstract Cauchy problems; *J. of Compu. and Appl. Math.*, 161, pp. 259-282, 2003
- [24] D. Breda: Methods for numerical computation of characteristic roots for delay

- differential equations: experimental comparison; *Sci. Math. Jpn.*, Vol. 58, No. 2, pp. 317-328, 2003
- [25] D. Breda: Solution operator approximation for characteristic roots of delay differential equations; *Appl. Numer. Math.*, Vol. 56, No. 3-4, 305-317, 2006
  - [26] D. Breda, S. Maset and R. Vermiglio: *Stability of Linear Delay Differential Equations: A Numerical Approach with MATLAB*; Springer, 2015
  - [27] Y. Yamamoto: A function space approach to sampled-data control systems and tracking problems; *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, Vol. 39, No. 4, pp. 703-713, 1994
  - [28] 平田: 時間遅れシステムに関連したある種のたたみ込み積分作用素のスペクトル計算について; システム制御情報学会論文誌, Vol. 21, No. 3, pp. 83-88, 2008
  - [29] T. Hagiwara and K. Hirata: Fast-lifting approach to the computation of the spectrum of retarded time-delay systems; *Eur. J. of Control*, Vol. 17, No. 2, pp. 162-171, 2011
  - [30] K. Hirata, T. Hagiwara and A. Itokazu: Numerical methods for spectrum computation of monodromy operators via non-causal hold discretization; *SICE JCMSI*, Vol. 6, No. 1, pp. 45-53, 2013
  - [31] O. J. M. Smith: A controller to overcome dead time; *ISA J.*, Vol. 6, No. 2, pp. 28-33, 1959
  - [32] A. Z. Manitius and A. W. Olbrot: Finite spectrum assignment problem for systems with delays; *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, Vol. AC-24, No. 4, pp. 541-553, 1979
  - [33] M. Krstic: *Delay Compensation for nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*; Springer (2010)
  - [34] 包, 荒木: むだ時間を含むプラントに対する状態予測制御系のロバスト安定性; システムと制御, Vol. 32, No. 1, pp. 58-65, 1988
  - [35] E. Furutani and M. Araki: Robust stability of state-predictive and smith control systems for plants with a pure delay; *Int. J. Robust Nonlinear Control*, Vol. 8, No. 10, pp. 907-919, 1998
  - [36] L. Mirkin: On the approximation of distributed-delay control laws; *Systems &*

*Control Letters*, Vol. 51, No. 5, 2004

- [37] T. Mita: Optimal digital feedback control systems counting computation time of control laws; *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, Vol. AC-30, No. 6, pp. 542-548, 1985
- [38] 美多, 原, 近藤: 基礎ディジタル制御; コロナ社, 1988
- [39] L. A. Mateo and K. Hirata: Eigenvalue structure of the predictor feedback for discrete-time LTI systems; *Proc. of the 15th IEEE ICIT*, pp. 67-72, 2014
- [40] 原, 美多: 離散時間サーボ系の安定化; 第 30 回自動制御連合講演会前刷, pp. 155-156, 1987
- [41] 萩原, 荒木: 演算遅れ系の極配置法; 計測自動制御学会論文集, Vol. 24, No. 5, pp. 531-533, 1988
- [42] 小川: 工学系の関数解析; 森北出版, 2010
- [43] コルモゴロフ, フォミーヌ著, 山崎, 柴岡訳: 関数解析の基礎; 岩波書店, 1979
- [44] 藤田, 黒田, 伊藤: 関数解析; 岩波基礎数学選書, 岩波書店, 1991
- [45] T. Kato: *Perturbation Theory for Linear Operators*; Springer, 1980
- [46] 山本, 原: サンプル値制御理論 I-システムとその表現; システム/制御/情報, Vol. 43, No. 8, pp. 436-443, 1999
- [47] 山本, 原: サンプル値制御理論 II-周波数応答とその計算; システム/制御/情報, Vol. 43, No. 10, pp. 561-568, 1999
- [48] K. Hirata and H. Kokame: Stability analysis of retarded systems via lifting technique; *Proc. of IEEE CDC*, pp. 5595-5596, 2003
- [49] K. Hirata and H. Kokame: Delayed feedback control of linear systems with state jump; *Proc. of IFAC Workshop on TDS*, 2003
- [50] 増井, 平田, 萩原: 高次ホールド離散化によるモノドロミ作用素のスペクトル計算について; システム制御情報学会研究発表講演会論文集, 213-3, 2013
- [51] R. H. Schappelle: Inverse of the confluent Vandermonde matrix; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 17, No. 5, pp. 724-725, 1972
- [52] C. F. van Loan: Computing integrals involving the matrix exponential; *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, Vol. 23, No. 3, pp. 395-404, 1978
- [53] 杉浦: 解析入門 I; 東京大学出版会, 1980

- [54] J. H. Kim, T. Hagiwara and K. Hirata: Spectrum of monodromy operator for a time-delay system with application to stability analysis; *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, Vol. 60, No. 12, pp. 3385-3390, 2015
- [55] 増井, 平田, マテオ, 中村: 状態予測制御系のスペクトルに関する一考察; 第3回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, 3B4-4, 2016
- [56] K.-J. Engel and R. Nagel: *One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*; Springer-Verlag, 2000

## 主要業績

### 学術論文誌

1. 増井詠一郎, 平田健太郎, 萩原朋道: 高次ホールド近似に基づくモノドロミ作用素のスペクトル計算について; システム制御情報学会論文誌, Vol. 29, No. 7, pp. 324-335, 2016

### 国際会議

1. Yoichiro Masui, Kentaro Hirata and Tomomichi Hagiwara: On Numerical Computation of the Spectrum of Monodromy Operators via Higher-Order Hold Discretization; *Proc. of the 21st MTNS*, pp. 861-866, 2014
2. Yoichiro Masui, Kentaro Hirata and Tomomichi Hagiwara: Modified State Predictive Control of Continuous-Time Systems with Input Delay; *Proc. of the 18th ICIT* (accepted)

### 口頭発表

1. 増井詠一郎, 平田健太郎, 萩原朋道: 高次ホールド離散化によるモノドロミ作用素のスペクトル計算について; 第 57 回システム制御情報学会研究発表講演会, 321-2, 2013
2. 増井詠一郎, 平田健太郎, Lorlynn Asuncion Mateo, 中村幸紀: 状態予測制御系のスペクトルに関する一考察; 第 3 回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, 3B4-4, 2016

## その他の業績

### 学術論文誌

1. Shota Sasaki, Kentaro Hirata, Yoichiro Masui, Masahiro Samei, Akihiro Kawasaki and Yasuharu Kawarasaki: State Estimation of Thermal Systems with Multiple Operation Modes; *International Journal of Simulation Systems, Science and Technology*, Vol. 17, No. 35, 2016

2. 矢納陽, 内田茂樹, 細谷直紀, 和田克啓, 見浪護, 松野隆幸, 増井詠一郎: 加熱炉からのふく射を考慮した耐火断熱レンガの熱伝導率と熱膨張率の推定; 電気学会論文誌 C, Vol. 137, No. 2, pp. 266-272, 2017

## 国際会議

1. Kentaro Hirata, Masauki Sato, Kazuyoshi, Hatada and Yoichiro Masui: Robust Controller Synthesis for a Class of Uncertain Systems and Application to Visual Feedback Control; *Proc. of the 39th IECON*, pp. 3738-3743, 2013
2. Shota Sasaki, Kentaro Hirata, Yoichiro Masui, Masahiro Samei, Akihiro Kawarasaki and Yasuharu Kawarasaki: State Estimation of Thermal Systems with Multiple Operation Modes; *Proc. of the 7th ICIT*, pp. 213-217, 2016
3. Kentaro Hirata, Daijiro Udagawa, Yoichiro Masui and Yukinori Nakamura: Model Predictive Control of Hot-Rolled Strip Cooling Process Using Variable-Resolution Model; *Proc. of the 42nd IECON*, 2016

## 口頭発表

1. 矢納陽, 内田茂樹, 細谷直紀, 見浪護, 松野隆幸, 増井詠一郎: 耐火断熱レンガの熱伝導率と熱膨張率の推定; 第3回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, 3D1-4, 2016
2. 守屋紀章, 平田健太郎, 増井詠一郎, 中村幸紀: レーザプリンタ定着プロセスの加熱方式と熱効率に関する制御検討; 第25回計測自動制御学会中国支部学術講演会論文集, pp. 94-95, 2016

## ポスター発表

1. 藤永隆孝, 増井詠一郎, 中村幸紀, 平田健太郎, 岡野訓尚: 配管長によるむだ時間を考慮した空気圧シリンダの修正状態予測制御; 第4回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, PS-40, 2017